CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Subespaços vetoriais

Definição

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(S1) $0 \in S$.

(S2) $u + v \in S, \ \forall u, v \in S$.

(S3) $\lambda u \in S, \ \forall u \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Subespaços vetoriais

Definição

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(S1) $0 \in S$.

(S2) $u + v \in S, \ \forall u, v \in S$.

(S3) $\lambda u \in S, \ \forall u \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Observações

- Um subespaço S é um espaço vetorial quando munido das operações de V. Por isso, muitas vezes dizemos **subespaço vetorial**. Note que o corpo de escalares de S é o mesmo de V.

Subespaços vetoriais

Definição

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(S1) $0 \in S$.

(S2) $u + v \in S, \ \forall u, v \in S$.

(S3) $\lambda u \in S, \ \forall u \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Observações

- Um subespaço S é um espaço vetorial quando munido das operações de V. Por isso, muitas vezes dizemos **subespaço vetorial**. Note que o corpo de escalares de S é o mesmo de V.
- Qualquer combinação linear de elementos de um subespaço ainda pertence ao subespaço, isto é, se $u_1, \ldots, u_n \in S$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, então

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \in S.$$

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Funções

Considere $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Funções

Considere $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

- $S = \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções contínuas.

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Funções

Considere $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

- $S = \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções contínuas.
- $W = \mathscr{C}^{(k)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções diferenciáveis de ordem k.

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Funções

Considere $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

- $S = \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções contínuas.
- $W = \mathscr{C}^{(k)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções diferenciáveis de ordem k.
- $Z = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios.

Intersecção

Se S_λ, $\lambda \in L$, é uma coleção de subespaços vetoriais de V, sendo L um conjunto qualquer de índices, então o conjunto

$$S = \bigcap_{\lambda \in L} S_\lambda,$$

é um subespaço.

Intersecção

Se S_λ, $\lambda \in L$, é uma coleção de subespaços vetoriais de V, sendo L um conjunto qualquer de índices, então o conjunto

$$S = \bigcap_{\lambda \in L} S_\lambda,$$

é um subespaço.

Hiperplano

Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ temos o subespaço S de $V = \mathbb{K}^n$ formado por todos os vetores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ soluções da equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n = 0.$$

Intersecção

Se S_λ, $\lambda \in L$, é uma coleção de subespaços vetoriais de V, sendo L um conjunto qualquer de índices, então o conjunto

$$S = \bigcap_{\lambda \in L} S_\lambda,$$

é um subespaço.

Hiperplano

Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ temos o subespaço S de $V = \mathbb{K}^n$ formado por todos os vetores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ soluções da equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n = 0.$$

Sistemas

O conjunto das soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é um subespaço de $\mathbb{K}^n$.

Subespaços gerados

Subespaços gerados

Definição

Dado um conjunto não vazio A em um espaço vetorial V denotamos por $ger(A)$ o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em A, isto é,

$$ger(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j,\ \alpha_j \in \mathbb{K},\ v_j \in A \right\}.$$

Subespaços gerados

Definição

Dado um conjunto não vazio A em um espaço vetorial V denotamos por $ger(A)$ o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em A, isto é,

$$ger(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j,\ \alpha_j \in \mathbb{K},\ v_j \in A \right\}.$$

- Note que $ger(A)$ é um subespaço de V é chamado de espaço gerado por A.
- Quando for $V = ger(A)$, então dizemos que A é um conjunto **gerador** de V.

Exemplos

Exemplos

Base canônica de $\mathbb{K}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ é um gerador de $\mathbb{K}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

Exemplos

Base canônica de $\mathbb{K}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ é um gerador de $\mathbb{K}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

Espaço coluna de uma matriz

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplos

Base canônica de $\mathbb{K}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ é um gerador de $\mathbb{K}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

Espaço coluna de uma matriz

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O espaço coluna de A é o subespaço $\mathcal{C}_A$ de $\mathbb{K}^n$ gerado pelos n vetores construídos através das colunas de A, sito é, tomamos o conjunto de vetores

$$v_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}),\ v_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots, v_1 = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$$

temos que

$$\mathcal{C}_A = ger(\{v_1, \ldots, v_n\}).$$

Somas de subespaços

Definição

Sejam V um espaço vetorial e A, B dois subconjuntos, não vazios, quaisquer. Definimos então o conjunto

$$A + B = \{c = a + b \in V;\ a \in A \ \text{ e } \ b \in B\}.$$

Somas de subespaços

Definição

Sejam V um espaço vetorial e A, B dois subconjuntos, não vazios, quaisquer. Definimos então o conjunto

$$A + B = \{c = a + b \in V;\ a \in A \ \text{ e } \ b \in B\}.$$

Lema

Se A, B são subespaços, então $A + B$ também é subespaço.

Exemplos

Matrizes

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

Exemplos

Matrizes

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

- $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são subespaços de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

Matrizes

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

- $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são subespaços de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Funções

Sejam $\mathcal{A} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ os espaços das funções pares e ímpares, respectivamente.

Exemplos

Matrizes

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

- $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são subespaços de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Funções

Sejam $\mathcal{A} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ os espaços das funções pares e ímpares, respectivamente.

- $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são subespaços de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exemplos

Matrizes

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

- $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são subespaços de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Funções

Sejam $\mathcal{A} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ os espaços das funções pares e ímpares, respectivamente.

- $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são subespaços de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
- $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Soma direta

Definição

Quando tivermos dois subespaços S_1 e S_2 de um espaço V, escreveremos

$$S = S_1 \oplus S_2,$$

quando $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Diremos neste caso que S é a soma direta de S_1 com S_2.

Soma direta

Definição

Quando tivermos dois subespaços S_1 e S_2 de um espaço V, escreveremos

$$S = S_1 \oplus S_2,$$

quando $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Diremos neste caso que S é a soma direta de S_1 com S_2.

Teorema

Sejam S_1 e S_2 dois subespaços de V. São equivalentes:

(a) $V = S_1 \oplus S_2$.

(b) Todo vetor em V se escreve, de modo único, como a soma $v = a + b$, sendo $a \in S_1$ e $b \in S_2$.