CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Base

Definição

Seja V um espaço vetorial.

(a) Uma base de V é um conjunto de vetores β que é L.I. e gera todo o espaço V.

(b) V é dito finitamente gerado se existe um conjunto com finitos vetores que gera V.

Teorema

(a) Todo espaço finitamente gerado, não trivial, possui base.

(b) Se V é finitamente gerado, então todas as bases de V tem a mesma quantidade de elementos.

(c) Um conjunto com n vetores em $\mathbb{K}^n$ é uma base se, e somente se, $det(A) \neq 0$, em que A é a matriz cujas colunas são tais vetores. (O mesmo vale se utilizarmos a matriz cujas linhas são esses vetores).

Definição

A dimensão de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V finitamente gerado é quantidade de elementos em uma de suas bases. Iremos escrever $dim_{\mathbb{K}} V$.

Observações

- Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que
$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$

Observações

- Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que
$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$

- Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de** v com respeito a base β.

Observações

- Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que
$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$
- Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de** v com respeito a base β.
- Nas condições acima, podemos associar a cada vetor $v \in V$ o vetor $v_\beta \in \mathbb{K}^n$ dado por
$$v_\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_\beta$$

Proposição

Sejam V um espaço de dimensão $n \geq 1$ e β um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes.

Observações

- Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que
$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$
- Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de** v com respeito a base β.
- Nas condições acima, podemos associar a cada vetor $v \in V$ o vetor $v_\beta \in \mathbb{K}^n$ dado por
$$v_\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_\beta$$

Proposição

Sejam V um espaço de dimensão $n \geq 1$ e β um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) β é uma base.

(b) β é L.I.

(c) β é um gerador de V.

Exemplos

Exemplo 1

Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + y - z = 0\}$$

(a) Vamos verificar que S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) Vamos obter uma base para S.

Exemplo 2

Considere o conjunto

$$S = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R});\ A^t = A\}$$

(a) Vamos verificar que S é um subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Vamos obter uma base para S.

Exemplos

Exemplo 3

Considere o conjunto

$$N(A) = \{v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ A \cdot v = 0, \}$$

sendo A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Vamos verificar que $N(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b) Vamos obter uma base para $N(A)$.

Base para espaço linha de uma matriz

Espaço linha de uma matriz

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Base para espaço linha de uma matriz

Espaço linha de uma matriz

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O **espaço linha** de A é o subespaço $\mathcal{E}_L(A)$ de $\mathbb{K}^m$ gerado pelos m vetores construídos através das **linhas** de A, isto é, denotando

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\ v_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, v_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

temos que $\mathcal{E}_L(A) = ger(\{v_1, \dots, v_m\})$.
O **posto** de uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$ é a dimensão do seu espaço linha.

Proposição

Se duas matrizes A e B são linha-equivalentes, então $\mathcal{E}_L(A) = \mathcal{E}_L(B)$

Exemplo

- As linha não nulas da matriz *linha degrau* formam uma base para o espaço linha.

Exemplo

Vamos obter uma base para o espaço linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Vamos verificar que $N(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b) Vamos obter uma base para $N(A)$.

Exemplo

- Se A é um matriz $m \times n$, então o posto de A somando com a dimensão de $N(A)$ é igual n.

Exemplo

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Base para espaço coluna de uma matriz

Espaço coluna de uma matriz

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Base para espaço coluna de uma matriz

Espaço coluna de uma matriz

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O **espaço coluna** de A é o subespaço $\mathcal{E}_C(A)$ de $\mathbb{K}^n$ gerado pelos n vetores construídos através das **colunas** de A, isto é, denotando

$$u_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),\ u_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, u_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

temos que

$$\mathcal{E}_C(A) = ger(\{u_1, \dots, u_n\}).$$

Base para espaço coluna de uma matriz

Espaço coluna de uma matriz

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O **espaço coluna** de A é o subespaço $\mathcal{E}_C(A)$ de $\mathbb{K}^n$ gerado pelos n vetores construídos através das **colunas** de A, isto é, denotando

$$u_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),\ u_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, u_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

temos que

$$\mathcal{E}_C(A) = ger(\{u_1, \dots, u_n\}).$$

Proposição

Se $A \in \mathbb{M}_{m\ timesn}$, então $dim(\mathcal{E}_L(A)) = dim(\mathcal{E}_C(A))$.

Exemplo

Exemplo 1

Vamos obter uma base para o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Exemplo 1

Vamos obter uma base para o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Determinar a dimensão do subespaço gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 2, -1, 0),\ v_2 = (2, 5, -3, 2),\ v_3 = (2, 4, -2, 0),\ v_4 = (3, 8, -5, 4).$$