CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Núcleo de uma matriz

Definição

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O núcleo de A é o subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$ definido por

$$N(A) = \{v \in \mathbb{K}^n;\ A \cdot v^t = 0\}.$$

Espaço linha de uma matriz

Definição

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Espaço linha de uma matriz

Definição

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O **espaço linha** de A é o subespaço $\mathcal{E}_L(A)$ de $\mathbb{K}^m$ gerado pelos m vetores construídos através das **linhas** de A, isto é, denotando

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\ v_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, v_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

temos que $\mathcal{E}_L(A) = ger(\{v_1, \dots, v_m\})$.
O **posto** de uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$ é a dimensão do seu espaço linha.

Como obter uma base para o espaço linha?

Proposição

São válidas as seguintes propriedades:

(a) Se duas matrizes A e B são linha-equivalentes, então $\mathcal{E}_L(A) = \mathcal{E}_L(B)$

(b) As linhas não nulas da matriz *linha degrau* formam uma base para o espaço linha.

(c) Se A é um matriz $m \times n$, então o posto de A somando com a dimensão de $N(A)$ é igual n, ou seja,
$$dim[\mathcal{E}_L(A)] + dim[N(A)] = n$$

Exemplos

Exemplo 1

Vamos obter uma base para $N(A)$ e uma para $\mathcal{E}_L(A)$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Vamos obter uma base para $N(B)$ e uma para $\mathcal{E}_L(B)$, sendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3

Vamos obter uma base para $N(C)$ e uma para $\mathcal{E}_L(C)$, sendo

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$