CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

DEFINIÇÃO 1

Dizemos que uma matriz está na sua forma **linha degrau** se:

- O primeiro elemento não nulo em cada linha não nula é 1.
- Se a linha k não consiste apenas de zeros, então o número de zeros iniciais da linha $k+1$ é maior que o número de zeros iniciais que na linha k.
- Se há linhas nulas, então elas estão abaixo daquelas que não são nulas.

DEFINIÇÃO 1

Dizemos que uma matriz está na sua forma **linha degrau** se:

- O primeiro elemento não nulo em cada linha não nula é 1.
- Se a linha k não consiste apenas de zeros, então o número de zeros iniciais da linha $k+1$ é maior que o número de zeros iniciais que na linha k.
- Se há linhas nulas, então elas estão abaixo daquelas que não são nulas.

DEFINIÇÃO 2

Dizemos que uma matriz está na sua forma **linha degrau reduzida** se:

- Está na sua forma linha degrau.
- O primeiro elemento não nulo em cada linha é o único não nulo em sua coluna.

NÚCLEO DE UMA MATRIZ

DEFINIÇÃO

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O núcleo de A é o subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$ definido por

$$N(A) = \{v \in \mathbb{K}^n;\ A \cdot v^t = 0\}.$$

Espaço linha de uma matriz

Definição

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ESPAÇO LINHA DE UMA MATRIZ

DEFINIÇÃO

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O **espaço linha** de A é o subespaço $\mathcal{E}_L(A)$ de $\mathbb{K}^m$ gerado pelos m vetores construídos através das **linhas** de A, isto é, denotando

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\ v_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, v_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

temos que $\mathcal{E}_L(A) = ger(\{v_1, \dots, v_m\})$.
O **posto** de uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$ é a dimensão do seu espaço linha.

COMO OBTER UMA BASE PARA O ESPAÇO LINHA?

PROPOSIÇÃO

São válidas as seguintes propriedades:

(a) Se duas matrizes A e B são linha-equivalentes, então $\mathcal{E}_L(A) = \mathcal{E}_L(B)$

(b) As linhas não nulas da matriz *linha degrau* formam uma base para o espaço linha.

(c) Se A é um matriz $m \times n$, então o posto de A somando com a dimensão de $N(A)$ é igual n, ou seja,

$$dim[\mathcal{E}_L(A)] + dim[N(A)] = n$$

ESPAÇO COLUNA DE UMA MATRIZ

ESPAÇO COLUNA DE UMA MATRIZ

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ESPAÇO COLUNA DE UMA MATRIZ

ESPAÇO COLUNA DE UMA MATRIZ

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O **espaço coluna** de A é o subespaço $\mathcal{E}_C(A)$ de $\mathbb{K}^n$ gerado pelos n vetores construídos através das **colunas** de A, isto é, denotando

$$u_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),\ u_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, u_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

temos que

$$\mathcal{E}_C(A) = ger(\{u_1, \dots, u_n\}).$$

ESPAÇO COLUNA DE UMA MATRIZ

ESPAÇO COLUNA DE UMA MATRIZ

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O **espaço coluna** de A é o subespaço $\mathcal{E}_C(A)$ de $\mathbb{K}^n$ gerado pelos n vetores construídos através das **colunas** de A, isto é, denotando

$$u_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),\ u_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, u_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

temos que

$$\mathcal{E}_C(A) = ger(\{u_1, \dots, u_n\}).$$

PROPOSIÇÃO

Se $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, então $dim(\mathcal{E}_L(A)) = dim(\mathcal{E}_C(A))$.

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Vamos determinar a dimensão de $\mathcal{E}_C(A)$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Exemplo 1

Vamos determinar a dimensão de $\mathcal{E}_C(A)$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Vamos determinar a dimensão de $\mathcal{E}_C(B)$, sendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Exemplo 1

Vamos determinar a dimensão de $\mathcal{E}_C(A)$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Vamos determinar a dimensão de $\mathcal{E}_C(B)$, sendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3

Vamos determinar a dimensão de $\mathcal{E}_C(C)$, sendo

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

PERGUNTA:

Como obter uma base para o espaço coluna de uma matriz A?

PERGUNTA:

Como obter uma base para o espaço coluna de uma matriz A?

1. Reduzimos A até sua forma linha degrau U.

PERGUNTA:

Como obter uma base para o espaço coluna de uma matriz A?

1. Reduzimos A até sua forma linha degrau U.
2. Procuramos as linhas não nulas de U.

PERGUNTA:

Como obter uma base para o espaço coluna de uma matriz A?

1. Reduzimos A até sua forma linha degrau U.
2. Procuramos as linhas não nulas de U.
3. Nessas linhas, as colunas em que tivermos o primeiro 1 indicará as colunas de A que determinam uma base de $\mathcal{E}_C(A)$.

EXEMPLO 4

Obter uma base para o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 4

Obter uma base para o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 5

Obter uma base para o subespaço gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 2, -1, 0),\ v_2 = (2, 5, -3, 2),\ v_3 = (2, 4, -2, 0),\ v_4 = (3, 8, -5, 4).$$