

CMM 031

Álgebra Linear

S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



DEFINIÇÃO

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $\text{ger}(\beta) = V$.

DEFINIÇÃO

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $\text{ger}(\beta) = V$.

OBSERVAÇÃO

- Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V , então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

DEFINIÇÃO

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $\text{ger}(\beta) = V$.

OBSERVAÇÃO

- Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V , então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

- Os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de v** com respeito a base β .

BASE

DEFINIÇÃO

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $\text{ger}(\beta) = V$.

OBSERVAÇÃO

- Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V , então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

- Os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de v com respeito a base β** .
- Nas condições acima, podemos associar a cada vetor $v \in V$ o vetor $v_\beta \in \mathbb{K}^n$ dado por

$$v_\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_\beta$$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{(5, 2), (7, 3)\} \text{ e } B = \{(3, 2), (1, 1)\}.$$

e o vetor $v = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$.

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{(5, 2), (7, 3)\} \text{ e } B = \{(3, 2), (1, 1)\}.$$

e o vetor $v = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$.

- 1 As coordenadas de v , com respeito a base A são

$$v_A = (-1, 1)_A$$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{(5, 2), (7, 3)\} \text{ e } B = \{(3, 2), (1, 1)\}.$$

e o vetor $v = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$.

- 1 As coordenadas de v , com respeito a base A são

$$v_A = (-1, 1)_A$$

- 2 As coordenadas de v , com respeito a base B são

$$v_B = (1, -1)_B$$

PERGUNTA

Seja v um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas na base A são $v_A = (\alpha, \beta)_A$. Podemos determinar as coordenadas de v na base B ?

PERGUNTA

Seja v um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas na base A são $v_A = (\alpha, \beta)_A$. Podemos determinar as coordenadas de v na base B ?

EXEMPLO 2

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{v_1 = (5, 2), v_2 = (7, 3)\} \text{ e } B = \{u_1 = (3, 2), u_2 = (1, 1)\}.$$

PERGUNTA

Seja v um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas na base A são $v_A = (\alpha, \beta)_A$. Podemos determinar as coordenadas de v na base B ?

EXEMPLO 2

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{v_1 = (5, 2), v_2 = (7, 3)\} \text{ e } B = \{u_1 = (3, 2), u_2 = (1, 1)\}.$$

Então, escrevendo

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases} \quad (1)$$

iremos obter

$$v_B^t = S \cdot v_A^t,$$

sendo

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- Então, resolvendo o sistema (1), obtemos

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

- Então, resolvendo o sistema (1), obtemos

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO 1

Note que a matriz S é invertível, logo

$$v_A^t = S^{-1} \cdot v_B^t.$$

Neste caso,

$$S = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIZ MUDANÇA DE BASE

- Considere duas bases

$$A = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ e } B = \{w_1, \dots, w_n\}$$

de um espaço vetorial V .

- Sejam v_A as coordenadas de um vetor $v \in V$ com respeito a base A .
- Então, escrevendo

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{n1}w_n \\ v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{n2}w_n \\ \vdots \\ v_n = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{nn}w_n \end{cases} \quad (2)$$

iremos obter $v_B^t = S \cdot v_A^t$, sendo

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

MATRIZ MUDANÇA DE BASE

DEFINIÇÃO

A matriz S obtida acima é dita **matriz de mudança de base** (da base A para B). Em particular, utilizaremos a notação

$$[S]_{A,B}.$$

OBSERVAÇÃO

A matriz $[S]_{A,B}$ é inversível, logo

$$[S]_{B,A} = [S]_{A,B}^{-1}.$$

EXEMPLOS

EM $\mathbb{R}^3$

Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$A = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 1, 1), (2, 3, 2), (1, 5, 4)\}$$

$$B = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 1)\}$$

Neste caso, temos

$$[S]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e

$$[S]_{B,A} = \begin{bmatrix} -4/3 & -10/3 & -1 \\ 4/3 & 7/3 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Assim, se $v_A = (3, 2, -1)_A$, então $V_B = (8, -5, 3)_A$.

EXEMPLOS

POLINÔMIOS

Considere as bases de $\mathcal{P}^3$

$$A = \{1, x, x^2\}$$

$$B = \{1, 2x, 4x^2 - 2\}$$

Neste caso, temos

$$[S]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

e

$$[S]_{B,A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Assim, se $p_A = (a, b, c)_A$, então $V_B = (a + \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}b, \frac{1}{4}c)_B$.