CMM 242 Espaços Métricos

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1

Exercício 1 *Mostre que para um espaço métrico $M = (M, d)$ valem as desigualdades*

(a) $|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$.

(b) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.

Exercício 2 *Obtenha uma sequência de números reais que converge para* 0*, mas não está em nenhum espaço* ℓ^p*, com* $1 \leq p < \infty$.

Exercício 3 *O diâmetro de um subconjunto não vazio A de um espaço métrico M é definido como sendo*

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

Em particular, A é dito limitado se $\delta(A) < +\infty$.

(a) Mostre que A é limitado se, e somente se, existem $p \in M$ e $r > 0$ tais que $A \subset B(p,r)$.

(b) Mostre que se $A \subset B$, então $\delta(A) \leq \delta(B)$.

(c) Mostre que $\delta(A) = 0$ se, e somente se, A só tem um ponto.

Exercício 4 *Duas métricas d_1 e d_2 num conjunto M são ditas equivalentes se existem constantes positivas a, b tais que*

$$ad_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq bd_2(x,y), \ \forall x,y \in M.$$

Supondo então que d_1 e d_2 são equivalentes, mostre que:

(a) Um conjunto $A \subset M$ é aberto com respeito a d_1 se, e somente se, é aberto com respeito a d_2.

(b) Um conjunto $A \subset M$ é fechado com respeito a d_1 se, e somente se, é fechado com respeito a d_2.

(c) Mostre que uma sequência $\{x_n\}_{n \in N}$ em M é convergente com respeito a d_1 se, e somente se, é convergente com respeito a d_2.

(d) Mostre que uma sequência $\{x_n\}_{n \in N}$ em M é de Cauchy com respeito a d_1 se, e somente se, é de Cauchy com respeito a d_2.

(e) Mostre que em $\mathbb{R}^n$ quaisquer duas métricas induzidas por normas são equivalentes.

Exercício 5 *Considere $\mathbb{R}^2$ munido com a métrica*

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{2} |x_j - y_j|,$$

sendo $x = (x_1, x_2)$ e $x = (y_1, y_2)$.

(a) *Desenhe a bola $B(0,r)$ nessa métrica.*

(b) *Calcule $\delta(B(0,r))$ nessa métrica.*

(c) *Calcule o perímetro de $B(0,r)$ nessa métrica.*

(d) *Qual a relação entre o diâmetro e o raio?*

Exercício 6 *Repita o exercício anterior considerando a métrica*

$$d(x,y) = \max_{j=1,2} |x_j - y_j|,$$

sendo $x = (x_1, x_2)$ e $x = (y_1, y_2)$.

Exercício 7 *Sejam $M_1 = (M_1, d_1)$ e $M_2 = (M_2, d_2)$ dois espaços métricos. Mostre que as seguintes funções definem métricas em $M = M_1 \times M_2$.*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2), \\ g(x,y) &= \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2}, \\ h(x,y) &= \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2\}, \end{aligned}$$

sendo $x = (x_1, x_2)$ e $x = (y_1, y_2)$.

Exercício 8 *Mostre que*

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$$

é uma métrica no espaço das funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Exercício 9 *Considere o espaço $\mathscr{R}([a,b])$ das funções integráveis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(a) *Mostre que*

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$$

não define uma métrica em $\mathscr{R}([a,b])$.

(b) *Mostre que a relação $f \sim g \doteq d(f,g) = 0$ define uma relação de equivalência em $\mathscr{R}([a,b])$.*

(c) *Seja N o conjunto de todas as classes de equivalência em $\mathscr{R}([a,b])$, sito é, o conjunto dos elementos*

$$[f] = \{g \in \mathscr{R}([a,b]);\ f \sim g\}$$

Mostre que a função $D : N \times N \to \mathbb{R}$ dada por

$$D([f],[g]) = d(f,g),\ f \in [f],\ g \in [g],$$

define uma métrica em N.

Exercício 10 *Mostre que a bola fechada é um conjunto fechado.*

Exercício 11 *Mostre que um conjunto é aberto se, e somente se, é a união de bolas abertas.*

Exercício 12 *Sejam $p \in M$ um ponto de acumulação de um conjunto A num espaço métrico.*

(a) *Mostre que todo conjunto aberto que contenha p irá conter infinitos pontos de A.*

(b) *Mostre que existe uma sequência de pontos, não constante, em A que converge para p.*

Exercício 13 *Mostre que:*

$$A \subset \overline{A},\ \overline{\overline{A}} = \overline{A},\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exercício 14 *Dizemos que $p \in M$ é um ponto de fronteira de um conjunto A se toda bola aberta centrada em p contém pontos de A e de A^c. O conjunto de pontos de fronteira de A é denotado por ∂A.*

1. *Mostre que ∂A é um conjunto fechado.*

2. *É possível termos $\partial A = \emptyset$?*

Exercício 15 *Mostre que se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para x, então toda subsequência também converge para o mesmo limite x.*

Exercício 16 *Sejam $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ duas sequências de Cauchy num espaço métrico M. Mostre que a sequência de números reais*

$$a_n = d(x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N},$$

é convergente.

Exercício 17 *Considere o espaço $\mathscr{C}([a,b])$ das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ munido da métrica.*

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Mostre que o conjunto $A = \{f \in \mathscr{C}([a,b]); f(a) = f(b)\}$ é fechado.

Exercício 18 *Sejam $M = (M,d)$ um espaço métrico completo e $F \subset M$ um subconjunto fechado. Mostre que $F = (F,d)$ é completo.*

Exercício 19 *Mostre que uma métrica d em um espaço vetorial V provém de uma norma se, e somente se,*

$$d(x+a, y+b) = d(x,y) \quad e \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $x, y \in V$.