CMM 242 Espaços Métricos

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2

Exercício 1 *Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$ um subconjunto. Mostre que um conjunto compacto na topologia relativa de X é um compacto de M.*

Exercício 2 *Mostre que o produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ é compacto se, e somente se, cada fator M_j é compacto.*

Exercício 3 *Mostre que a imagem de um conjunto compacto por um função contínua é ainda um compacto.*

Exercício 4 *Dados $a, b \in M$, suponha que exista $X \subset M$ aberto tal que $a \in X$ e $b \notin X$. Mostre que nenhum conexo de M pode conter a e b simultaneamente.*

Exercício 5 *Mostre que um espaço métrico M é conexo se, e somente se, toda função contínua $f : M \to \{0, 1\}$ é constante.*

Exercício 6 *Mostre que para todo função contínua $f : S^1 \to \mathbb{R}$ existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Exercício 7 *Mostre que em S^1 o complementar de um conexo é ainda conexo.*

Exercício 8 *Seja $p \in \overline{A}$. Mostre que existe uma sequência x_n de pontos em A tal que $x_n \to p$. Se $p \in A'$, então x_n é não constante.*

Exercício 9 *Sejam M_j, $j \in \mathbb{N}$, uma família de espaços métricos $M_j = (M_j, d_j)$. Suponha que, para cada $j \in \mathbb{N}$ exista $c_j \in \mathbb{R}$ tal que*

$$d_j(a, b) \leq c_j, \forall a, b \in M_j, \quad e \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_j < \infty.$$

(a) Mostre que

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j(x_j, y_j)$$

é uma métrica em $M = \prod_{j=1}^{\infty} M_j$.

(b) Mostre que cada projeção $p_j : M \to M_j$, dada por $p_j(x) = x_j$, é contínua e aberta.

(c) Se N é um espaço métrico, mostre que $f : N \to M$ é contínua se, e somente se, cada função $f_j = p_j \circ f : N \to M_j$ é contínua.

(d) Sejam $F_j \subset M_j$ e ponha $X = \prod_{j=1}^{\infty} X_j$.

$$\overline{X} = \prod_{j=1}^{\infty} \overline{X}_j.$$

(e) Mostre que M é compacto se, e somente se, cada M_j é compacto.

Exercício 10 *Sejam M_j, $j \in \mathbb{N}$, uma família de espaços métricos $M_j = (M_j, d_j)$. Suponha que, para cada $j \in \mathbb{N}$ exista $c_j \in \mathbb{R}$. Mostre que*

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{d_j(x_j, y_j)}{1 + d_j(x_j, y_j)}$$

é uma métrica em $M = \prod_{j=1}^{\infty} M_j$.

Exercício 11 *Estude a seção 6, do capítulo 5 lo livro do Elon.*

Exercício 12 *Estude o capítulo 8 lo livro do Elon.*