CMM 242 Espaços Métricos

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3

Exercício 1 *Considere* $M, N_1, \ldots, N_d$ *espaços métricos e* $f : M \to N = \prod_{j=1}^{d} N_j$ *uma função.*

(a) Mostre que as projeções $P_k : N \to N_k$, $k \in \{1, \ldots, d\}$ *são contínuas.*

(b) Mostre que f *é contínua se, e somente se, suas funções coordenadas* $f_j = P_j \circ f$ *são contínuas.*

(c) Mostre que f *é uniformemente contínua se, e somente se, suas funções coordenadas* $f_j = P_j \circ f$ *são uniformemente contínuas.*

Exercício 2 *Mostre que uma função uniformemente contínua leva sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Exercício 3 *Uma transformação linear entre espaços normados* $\mathcal{N}_1$ *e* $\mathcal{N}_2$ *é uma função* $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ *tal que*

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi), \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \eta, xi \in \mathcal{N}_1.$$

(a) Mostre que são equivalentes:

- T *é contínuo.*
- T *é contínuo em 0.*
- *Existe* $C > 0$ *tal que* $\|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1$, *para todo* $\eta \in \mathcal{N}_1$
- $\sup_{\|\eta\| \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$

(b) Mostre que se $dim\mathcal{N}_1 < \infty$, *então toda transformação linear* $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ *é contínua.*

(c) Mostre que $T : C[0,1] \to C[0,1]$ *dado por*

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds$$

é contínuo

(d) Seja $D \subset C[0,1]$ *o subespaço do polinômios* $p : [0,1] \to \mathbb{R}$. *Mostre que o* $T : D \to C[0,1]$ *dado por* $Tp = p'$ *não é contínuo.*

Exercício 4 *Uma função* $f : M \to N$ *entre espaços métricos é dita uma imersão isométrica se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

Uma isometria é uma imersão sobrejetiva.

(a) Mostre que uma imersão isométrica é necessariamente injetiva;

(b) Mostre que qualquer imersão isométrica define uma isometria $f : M \to f(M)$;

(c) *Sejam M um espaço métrico, X um conjunto e $f : X \to M$ uma função injetiva. Mostre que a expressão*

$$d_f(x, y) \doteq d_M(f(x), f(y))$$

define uma imersão isométrica

(d) *Fixados $a, u \in \mathbb{R}^n$, com $||u|| = 1$, mostre que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = a + tu$ é uma imersão isométrica. (Considere uma métrica no espaço $\mathbb{R}^n$ induzido por uma norma qualquer).*

(e) *Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial formado pelas sequências $x = (x_1, x_2, \ldots)$ com apenas um número finito de termos $x_k \neq 0$. Defina em $\mathbb{R}^\infty$ o produto itnerno $< x, y >= \sum_j x_j y_j$. Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dada por*

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

é uma imersão isométrica mas não é uma isometria;

Exercício 5 *Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : M \to N$, entre espaços métricos, é homeomorfo ao domínio de f. (Siga os passos abaixo)*

(a) *pondo $G(f) = \{(x, f(x));\ x \in M\} \subset M \times N$ considere a função $\widehat{f}(x) = (x, f(x))$;*

(b) *obtenha a inversa de $\widehat{f}$;*

Como aplicação, mostre que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é homeomorfo à hipérbole $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$.

Exercício 6 *Sejam M, N espaços métricos e $f, g : M \to N$ duas funções.*

(a) *Se ambas são contínuas num ponto $a \in M$ e $f(a) \neq g(a)$. Mostre que existe uma bola aberta B, de centro a, tal que $f(B) \cap g(B) = \emptyset$. Em particular, se $x \in B$ então $f(x) \neq g(x)$.*

(b) *Suponha que f e g são contínuas em M. Dado $a \in M$ suponha que toda bola de cetnro a contenha um ponto x tal que $f(x) = g(x)$. Mostre que $f(a) = g(a)$. Usando este fato, mostre que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e $f(x) = g(x)$ para todo x racional, então $f = g$.*

Exercício 7 *Sejam X, Y espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Dizemos que f é compatível com uma relação de equivalência $\sim$ em X se $a \sim b$ implica $f(a) = f(b)$.*

(a) *Mostre que f é compatível com $\sim$ se, e somente se, f é constante sobre cada classe de equivalência determinada por $\sim$;*

(b) *Se f é compatível com $\sim$, então existe única função $\overline{f} : X/\sim \to Y$ tal que $\overline{f} \circ \phi = f$, sendo $\phi : X \to X/\sim$ a aplicação quociente;*

(c) *Mostre que $\overline{f}$ é contínua;*

Exercício 8 *Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas dentre espaços métricos. Mostre que o conjunto*

$$F = \{x \in X;\ f(x) = g(x)\}$$

é fechado.

Exercício 9 *Suponha $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

(a) *Mostre que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para qualquer conjunto $A \subset M$;*

(b) Se $Z(f)$ denota o conjunto de zeros de f, então $Z(f)$ é fechado;

(c) Suponha f sobrejetiva e A é um subconjunto denso de M, mostre então $f(A)$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é outra função contínua e sobrejetiva. Mostre que se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, então $f = g$;

(d) Suponha $M = \mathbb{R}$ que $f(r) = 0$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

Exercício 10 *Sejam E, F espaços normados e $T : E \to F$ linear. Mostre que se T é descontínua em um ponto, então é descontínua em todos o pontos.*

Exercício 11 *Considere M um espaço métrico e $X \subset M$ um subconjunto. Defina a função $\xi_X : M \to \mathbb{R}$ pondo*

$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X, \\ 0, & x \notin X. \end{cases}$$

Mostre que o conjunto de descontinuidades de ξ_X é a fronteira de X.

Exercício 12 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $A = \{x \in M; f(x) > 0\}$.*

(a) Mostre que A é aberto em M.

(b) Mostre que se $x \in \partial A$, então $f(x) = 0$.