CMM 242 Espaços Métricos

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4

Exercício 1 *Considere a sequência de funções reais*

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

Mostre que $\{f_n\}$ *converge uniformemente para uma função* f *e que*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),\ x \neq 0.$$

Exercício 2 *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções* $M \to N$ *que converge uniformemente para* $f : M \to N$*. Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x),$$

com $x_n \to x$*.*

Exercício 3 *Considere*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge para uma função descontínua na origem.*

Exercício 4 *Considere*

$$f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n^{1/2}}.$$

Mostre que $\lim_{n\to\infty} f'(x) \neq (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$*.*

Exercício 5 *Considere* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$*,* $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$*. Mostre que*

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Exercício 6 *Mostre que uma sequência de funções* $f_n : M \to N$ *é uniformemente convergente se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow d_N(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon,\ \forall x \in M.$$

Exercício 7 *Seja* $f_n : M \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções tal que existe* $M_n \in \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$\sup_{x\in M} f_n(x) \leq M_n \quad e \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty.$$

Mostre que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *é uniformemente convergente.*

Exercício 8 *Seja* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções integráveis tal que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *seja uniformemente convergente. Então,*

$$\int_a^b \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Exercício 9 *Seja* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções integráveis tal que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente para* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Mostre que* f *é integrável e que*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Exercício 10 *Seja* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções diferenciáveis em* $[a,b]$ *tal que* $\{f_n(x_0)\}$ *converge para algum ponto* $x_0 \in [a,b]$*. Mostre que se* $\{f_n'\}$ *é uniformemente convergente, então* $\{f_n\}$ *também é uniformemente convergente. Em particular, pondo* $f_n \to f$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

Exercício 11 *Exiba uma função continua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que não seja diferenciável em ponto algum de* $\mathbb{R}$.