CMM 242 Espaços Métricos

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA AVALIATIVA - 2

Entregar no dia da segunda prova - 4 de junho

Exercício 1 *Suponha $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

(a) Mostre que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para qualquer conjunto $A \subset M$;

(b) Se $Z(f)$ denota o conjunto de zeros de f, então $Z(f)$ é fechado;

(c) Suponha f sobrejetiva e A é um subconjunto denso de M, mostre então $f(A)$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é outra função contínua e sobrejetiva. Mostre que se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, então $f = g$;

(d) Suponha $M = \mathbb{R}$ que $f(r) = 0$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

Exercício 2 *Sejam E, F espaços normados e $T : E \to F$ linear. Mostre que se T é descontínua em um ponto, então é descontínua em todos o pontos.*

Exercício 3 *Considere M um espaço métrico e $X \subset M$ um subconjunto. Defina a função $\xi_X : M \to \mathbb{R}$ pondo*

$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X, \\ 0, & x \notin X. \end{cases}$$

Mostre que o conjunto de descontinuidades de ξ_X é a fronteira de X.

Exercício 4 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $A = \{x \in M; f(x) > 0\}$.*

(a) Mostre que A é aberto em M.

(b) Mostre que se $x \in \partial A$, então $f(x) = 0$.

Exercício 5 *Uma transformação linear entre espaços normados $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é uma função $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ tal que*

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \eta, xi \in \mathcal{N}_1.$$

(a) Mostre que são equivalentes:

- *T é contínuo.*
- *T é contínuo em 0.*
- *Existe $C > 0$ tal que $\|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1$, para todo $\eta \in \mathcal{N}_1$*
- $\sup_{\|\eta\| \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$

(b) Mostre que se $dim \mathcal{N}_1 < \infty$, então toda transformação linear $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é contínua.

(c) *Mostre que* $T : C[0,1] \to C[0,1]$ *dado por*

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds$$

é contínuo

(d) *Seja* $D \subset C[0,1]$ *o subespaço do polinômios* $p : [0,1] \to \mathbb{R}$. *Mostre que o* $T : D \to C[0,1]$ *dado por* $Tp = p'$ *não é contínuo.*

Exercício 6 *Considere* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$. *Mostre que*

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Exercício 7 *Mostre que uma sequência de funções* $f_n : M \to N$ *é uniformemente convergente se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow d_N(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon,\ \forall x \in M.$$

Exercício 8 *Seja* $f_n : M \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções tal que existe* $M_n \in \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$\sup_{x\in M} f_n(x) \leq M_n \quad e \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty.$$

Mostre que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *é uniformemente convergente.*