CMM 242 Espaços Métricos

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

Prova 1

Exercício 1 (10 pontos) *Mostre que*

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$$

é uma métrica no espaço das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Exercício 2 (20 pontos) *Seja* M *um espaço métrico.*

(a) Mostre que a bola aberta é um conjunto aberto em M.

(b) Mostre que a interseção qualquer de fechados é ainda um fechado.

(c) Exiba um exemplo em $\mathbb{R}$ *de uma união infinita de fechados que não é um fechado.*

(d) Mostre que todo compacto é limitado e fechado.

Exercício 3 (30 pontos) *Sejam* d_1 *e* d_2 *duas métricas equivalentes em* M*, isto é, existem* $a, b > 0$ *tais que*

$$ad_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq bd_2(x,y), \ \forall x, y \in M.$$

Mostre que:

(a) uma sequência $\{x_n\}_{n \in N}$ *em* M *é convergente com respeito a* d_1 *se, e somente se, é convergente com respeito a* d_2.

(b) uma sequência $\{x_n\}_{n \in N}$ *em* M *é de Cauchy com respeito a* d_1 *se, e somente se, é de Cauchy com respeito a* d_2.

(c) $M_1 = (M, d_1)$ *é completo se, e somente se,* $M_2 = (M, d_2)$ *é completo.*

Exercício 4 (20 pontos) *Considere o espaço* $\mathscr{C}([a,b])$ *das funções contínuas* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *munido da métrica.*

$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Mostre que o conjunto $A = \{f \in \mathscr{C}([a,b]); f(a) = f(b)\}$ *é fechado.*

Exercício 5 (20 pontos) *Utilizando a teoria de espaços métricos, exiba uma estratégia para a prova do seguinte resultado:*

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *exista e seja contínua em* U*. Nestas condições, dado qualquer ponto* $(t_0, y_0) \in U$*, existe uma única solução do P.V.I.*

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

definida num intervalo aberto $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$*, para um certo* $\alpha = \alpha(x_0, xy0) > 0$.