

CMM 242

Espaços Métricos

S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



APRESENTAÇÃO DO CURSO

Ementa:

Espaços métricos. Topologia dos espaços métricos: conjuntos abertos, fechados, compactos e conexos. Funções Contínuas. Espaços métricos conexos: conexidade, conexidade por caminhos, conexidade como invariante topológico. Limites de sequências, sequências de Cauchy e espaços métricos completos. Completamento de espaços métricos. Aplicações.

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Ementa:

Espaços métricos. Topologia dos espaços métricos: conjuntos abertos, fechados, compactos e conexos. Funções Contínuas. Espaços métricos conexos: conexidade, conexidade por caminhos, conexidade como invariante topológico. Limites de sequências, sequências de Cauchy e espaços métricos completos. Completamento de espaços métricos. Aplicações.

Critérios de avaliação: Listas e provas

PLANO

Programa	Conteúdo
Parte I	Topologia
Parte II	Completeza

BIBLIOGRAFIA

- Livro texto:



Lima, Elon L., Espaços métricos, Projeto Euclides, SBM

- Outras boas referências:



Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis, Mc-Graw-Hill.



Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with applications.

MÉTRICA

DEFINIÇÃO

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(D1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M.$

(D2) $d(x, y) = 0 \iff x = y.$

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M.$ (Simetria)

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M.$ (Desigualdade Triangular)

MÉTRICA

DEFINIÇÃO

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(D1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M.$

(D2) $d(x, y) = 0 \iff x = y.$

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M.$ (Simetria)

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M.$ (Desigualdade Triangular)

- Um conjunto M munido de uma métrica d é chamado de *Espaço Métrico* e por vezes denotamos (M, d) .
- Se consideramos num conjunto M duas métricas, digamos d_1 e d_2 , então teremos dois espaços métricos $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$.
- Se (M, d) é um espaço métrico e $X \subset M$ é um subconjunto, então podemos considerar o espaço métrico $(X, \tilde{d})$, sendo $\tilde{d}$ a restrição de d ao conjunto $X \times X$. (Dizemos que $\tilde{d}$ é a métrica induzida por d).

MÉTRICA DISCRETA

MÉTRICA 0 – 1

Num conjunto $M \neq \emptyset$ temos a métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

UM IMPORTANTE EXEMPLO: ESPAÇOS NORMADOS

DEFINIÇÃO (NORMA)

Uma norma num $\mathbb{K}$ -espaço ($\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) vetorial V é uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (N1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.
- (N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;
- (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$.

UM IMPORTANTE EXEMPLO: ESPAÇOS NORMADOS

DEFINIÇÃO (NORMA)

Uma norma num $\mathbb{K}$ -espaço ($\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) vetorial V é uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (N1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.
- (N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;
- (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$.

- O par $(V, \|\cdot\|)$ é dito ser um *espaço normado*.
- Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado e W é um subespaço vetorial de V , então temos o espaço normado $(W, \|\cdot\|_W)$, sendo $\|\cdot\|_W$ a restrição de $\|\cdot\|$ sobre W .

UM IMPORTANTE EXEMPLO: ESPAÇOS NORMADOS

DEFINIÇÃO (NORMA)

Uma norma num $\mathbb{K}$ -espaço ($\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) vetorial V é uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (N1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.
- (N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;
- (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$.

- O par $(V, \|\cdot\|)$ é dito ser um *espaço normado*.
- Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado e W é um subespaço vetorial de V , então temos o espaço normado $(W, \|\cdot\|_W)$, sendo $\|\cdot\|_W$ a restrição de $\|\cdot\|$ sobre W .

PROPOSIÇÃO

Num espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ tem-se a métrica (induzida):

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

O ESPAÇO EUCLIDIANO

- Considere $\mathbb{R}^n$ com sua estrutura natural de espaço vetorial real e assuma fixada a base canônica. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escreva $x = (x_1, \dots, x_n)$.
- Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas:

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_s = \sum_{j=1}^n |x_j| \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

ESPAÇOS DE FUNÇÕES

- Sejam X um conjunto arbitrário e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é limitada se existe $K \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq K, \forall x \in X.$$

- O conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$ será denotado por $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$.

ESPAÇOS DE FUNÇÕES

- Sejam X um conjunto arbitrário e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é limitada se existe $K \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq K, \forall x \in X.$$

- O conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$ será denotado por $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$.

Uma norma em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$

A função $\| \cdot \| : \mathcal{B}(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

define uma norma em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$, chamada de *norma da convergência uniforme*.

Uma norma em $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto e $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então temos a norma

$$\|f\| = \sup_{x \in I} \|f(x)\| = \max_{x \in I} \|f(x)\|$$

ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS LIMITADAS

- Considere o conjunto X de todas as sequências de números complexos limitadas, isto é,

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots); |x_j| \leq C_x, \text{ para algum } C_x \geq 0\}.$$

- Temos então o espaço métrico $\ell^\infty = (X, d)$, sendo

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j|.$$

ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS

- Considere o conjunto s de todas as sequências de números complexos

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots); x_j \in \mathbb{C}\}.$$

- Temos então o espaço métrico $s = (X, d)$, sendo

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}$$

ESPAÇOS ℓ^p

DEFINIÇÃO

Dado $p \geq 1$, denotamos por ℓ^p o espaço das sequencias de números complexos $x = (x_j)$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty.$$

Em ℓ^p temos a métrica

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- dado $p > 1$, seu expoente conjugado é o número q solução de

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

- em particular, se α, β são números não negativos vale

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

DESIGUALDADE DE HÖLDER

Dados $x \in \ell^p$ e $y \in \ell^q$, sendo p, q expoentes conjugados, vale a desigualdade

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

DESIGUALDADE DE MINKOWSKI

Dados $x, y \in \ell^p$, $p \geq 1$, vale a desigualdade

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$