CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Funções contínuas

Definição

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(p)) < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x, p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

Funções contínuas

Definição

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(p)) < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x,p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

Observação

Note que f é contínua em p se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$x \in B_M(p, \delta) \Longrightarrow f(x) \in B_N(f(p), \epsilon)$$

ou equivalentemente, $f(B_M(p, \delta)) \subset B_N(f(p), \epsilon)$.

Funções contínuas

Definição

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(p)) < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x,p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

Observação

Note que f é contínua em p se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$x \in B_M(p, \delta) \Longrightarrow f(x) \in B_N(f(p), \epsilon)$$

ou equivalentemente, $f(B_M(p, \delta)) \subset B_N(f(p), \epsilon)$.

Proposição 1

Temos f contínua em M se, e somente se, para todo aberto $Y \subset N$, tivermos que $f^{-1}(Y)$ aberto em M.

Exemplos: Funções Lipschitzianas

Definição

Uma função $f : M \to N$ é dita Lipschitziana se existe $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

Exemplos: Funções Lipschitzianas

Definição

Uma função $f : M \to N$ é dita Lipschitziana se existe $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

- Dizemos que c é uma constante de Lipschitz.

Exemplos: Funções Lipschitzianas

Definição

Uma função $f : M \to N$ é dita Lipschitziana se existe $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

- Dizemos que c é uma constante de Lipschitz.
- Toda função Lipschitziana é contínua.

Exemplos: Funções Lipschitzianas

Definição

Uma função $f : M \to N$ é dita Lipschitziana se existe $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

- Dizemos que c é uma constante de Lipschitz.
- Toda função Lipschitziana é contínua.
- Note que o δ não depende do ponto!

Exemplos: Funções Lipschitzianas

Definição

Uma função $f : M \to N$ é dita Lipschitziana se existe $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

- Dizemos que c é uma constante de Lipschitz.
- Toda função Lipschitziana é contínua.
- Note que o δ não depende do ponto!
- Toda contração é uma função Lipschitziana.

Exemplos: Funções Lipschitzianas

Definição

Uma função $f : M \to N$ é dita Lipschitziana se existe $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

- Dizemos que c é uma constante de Lipschitz.
- Toda função Lipschitziana é contínua.
- Note que o δ não depende do ponto!
- Toda contração é uma função Lipschitziana.
- A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n$ é Lipschitziana em todo intervalo limitado.

Exemplos: Funções Lipschitzianas

Definição

Uma função $f : M \to N$ é dita Lipschitziana se existe $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

- Dizemos que c é uma constante de Lipschitz.
- Toda função Lipschitziana é contínua.
- Note que o δ não depende do ponto!
- Toda contração é uma função Lipschitziana.
- A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n$ é Lipschitziana em todo intervalo limitado.
- Toda isometria é uma função Lipschitziana.

Exemplos: Espaços discretos

- Note que se $a \in M$ é um ponto isolado, então toda função $f : M \to N$ é contínua em a.

Exemplos: Espaços discretos

- Note que se $a \in M$ é um ponto isolado, então toda função $f : M \to N$ é contínua em a.
- Se M é discreto, então toda função $f : M \to N$ é contínua.

Exemplos: Espaços discretos

- Note que se $a \in M$ é um ponto isolado, então toda função $f : M \to N$ é contínua em a.
- Se M é discreto, então toda função $f : M \to N$ é contínua.
- Se N é discreto, então $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, cada ponto de a é centro de uma bola na qual f é constante.

Descontinuidade

Importante

Um função $f : M \to N$ é descontínua num ponto $a \in M$ se, e somente se, existe um $\epsilon > 0$ satisfazendo o seguinte: dado qualquer $\delta > 0$, existe $x_\delta > 0$ tal que

$$d_M(x, \delta) < \delta \;\text{ e }\; d_N(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon$$

Descontinuidade

Importante

Um função $f : M \to N$ é descontínua num ponto $a \in M$ se, e somente se, existe um $\epsilon > 0$ satisfazendo o seguinte: dado qualquer $\delta > 0$, existe $x_\delta > 0$ tal que

$$d_M(x, \delta) < \delta \text{ e } d_N(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon$$

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos.

Descontinuidade

Importante

Um função $f : M \to N$ é descontínua num ponto $a \in M$ se, e somente se, existe um $\epsilon > 0$ satisfazendo o seguinte: dado qualquer $\delta > 0$, existe $x_\delta > 0$ tal que

$$d_M(x, \delta) < \delta \text{ e } d_N(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon$$

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos.

Teorema

Uma função $f : M \to N$ é contínua em a se, e somente se, vale a seguinte propriedade: para toda sequência $\{x_n\}_{nin\mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \to a$, temos $f(x_n) \to f(a)$.

Composição

Teorema

A composta de funções contínuas é contínua.

Observação

A aplicação $i : X \to M$, com $X \subset M$, é contínua.

Composição

Teorema

A composta de funções contínuas é contínua.

Observação

A aplicação $i : X \to M$, com $X \subset M$, é contínua.

Corolário

A restrição de uma função contínua $f : M \to N$ a um subconjunto $X \subset M$ é uma função contínua $f_X : X \to N$.

Composição

Teorema

A composta de funções contínuas é contínua.

Observação

A aplicação $i : X \to M$, com $X \subset M$, é contínua.

Corolário

A restrição de uma função contínua $f : M \to N$ a um subconjunto $X \subset M$ é uma função contínua $f_X : X \to N$.

Observação

Não vale a volta! De fato, o exemplo acima temos que $f_{\mathbb{Q}}$ é contínua!

Sobre produtos cartesianos

- Consideremos num produto $M \times N$ a métrica

$$d((a,b),(c,d)) = \max\{d_M(a,c), d_N(b,d)\}$$

Sobre produtos cartesianos

- Consideremos num produto $M \times N$ a métrica

$$d((a,b),(c,d)) = \max\{d_M(a,c), d_N(b,d)\}$$

Observação

Um função $f : M \times N \to W$ é contínua em $p = (a,b) \in M \times N$ se e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_M(x,a) < \delta \text{ e } d_N(y,b) < \delta \implies d_W(f(x,y), f(a,b)) < \epsilon.$$

Sobre produtos cartesianos

- Consideremos num produto $M \times N$ a métrica

$$d((a,b),(c,d)) = \max\{d_M(a,c), d_N(b,d)\}$$

Observação

Um função $f : M \times N \to W$ é contínua em $p = (a,b) \in M \times N$ se e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_M(x,a) < \delta \text{ e } d_N(y,b) < \delta \implies d_W(f(x,y), f(a,b)) < \epsilon.$$

Exemplo

A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \; x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, x = y = 0 \end{cases}$$

é descontínua em $(0,0)$ apesar de ser contínua em cada variável.

Sobre produtos cartesianos

Observação

- Note que as projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$, dadas por

$$p_1(x, y) = x \text{ e } p_2(x, y) = y$$

são contínuas

Sobre produtos cartesianos

Observação

- Note que as projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$, dadas por

$$p_1(x,y) = x \ \text{ e } \ p_2(x,y) = y$$

  são contínuas

- Dada uma função $f : M \to N_1 \times N_2$, existem duas funções $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$ tais que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)), \ \forall x \in M.$$

Sobre produtos cartesianos

Observação

- Note que as projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$, dadas por

$$p_1(x,y) = x \;\text{ e }\; p_2(x,y) = y$$

  são contínuas
- Dada uma função $f : M \to N_1 \times N_2$, existem duas funções $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$ tais que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)), \;\forall x \in M.$$

Proposição

Uma função $f : M \to N_1 \times N_2$ é contínua se, e somente se, são contínuas as funções $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$.