CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Funções contínuas

Definição

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(p)) < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x, p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

Funções contínuas

Definição

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(p)) < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x,p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

Proposição 1

Seja $f : M \to N$ uma função. Então, f é:

(a) contínua em M se, e somente se, para todo aberto $Y \subset N$, $f^{-1}(Y)$ aberto em M.

(b) descontínua num ponto $a \in M$ se, e somente se, existe um $\epsilon > 0$ satisfazendo o seguinte: dado qualquer $\delta > 0$, existe $x_\delta > 0$ tal que

$$d_M(x, \delta) < \delta \ \text{ e } \ d_N(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon$$

(c) contínua em a se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\}_{nin\mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \to a$, temos $f(x_n) \to f(a)$.

Homeomorfismo

Definição

Um homeomorfismo entre os espaços métricos M e N é uma função $f : M \to N$ tal que

- f é contínua.
- f é bijetiva.
- $f^{-1} : N \to M$ é contínua.

Neste caso, dizemos que M e N são homeomorfos e escrevemos $M \sim N$.

Homeomorfismo

Definição

Um homeomorfismo entre os espaços métricos M e N é uma função $f : M \to N$ tal que

- f é contínua.
- f é bijetiva.
- $f^{-1} : N \to M$ é contínua.

Neste caso, dizemos que M e N são homeomorfos e escrevemos $M \sim N$.

Observação

Note que a relação $M \sim N$ define uma relação de equivalência no conjunto de todos os espaços métricos.

Exemplos

Exemplo 1

Se $M \sim N$ e N é discreto, então M também o é.

Exemplos

Exemplo 1

Se $M \sim N$ e N é discreto, então M também o é.

Observação

Note que os espaços $\mathbb{N}$ e $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, vistos com a métrica induzida de $\mathbb{R}$ são homeomorfos, porém P é limitado e $\mathbb{N}$ não.

Exemplos

Exemplo 1

Se $M \sim N$ e N é discreto, então M também o é.

Observação

Note que os espaços $\mathbb{N}$ e $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, vistos com a métrica induzida de $\mathbb{R}$ são homeomorfos, porém P é limitado e $\mathbb{N}$ não.

Definição

Propriedades preservadas por homeomorfismos são chamadas de **propriedades topológicas**.

Exemplos

Exemplo 2

Todas as bolas abertas num espaço normado E são homeomorfas.

Exemplos

Exemplo 2

Todas as bolas abertas num espaço normado E são homeomorfas.

- Fixados $a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere os homeomorfismos $t_a : E \to E$ e $m_\lambda : E \to E$ dados por

$$t_a(x) = a + x \ \text{ e } \ m_\lambda(x) = \lambda x.$$

- Então, basta utilizar $\varphi = t_b \circ m_{s/r} \circ t_{-a}$.

Exemplos

Exemplo 2

Todas as bolas abertas num espaço normado E são homeomorfas.

- Fixados $a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere os homeomorfismos $t_a : E \to E$ e $m_\lambda : E \to E$ dados por
$$t_a(x) = a + x \text{ e } m_\lambda(x) = \lambda x.$$
- Então, basta utilizar $\varphi = t_b \circ m_{s/r} \circ t_{-a}$.

Observação

Num espaço métrico qualquer esse resultado pode não ser válido!

Exemplos

Exemplo 2

Todas as bolas abertas num espaço normado E são homeomorfas.

- Fixados $a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere os homeomorfismos $t_a : E \to E$ e $m_\lambda : E \to E$ dados por
$$t_a(x) = a + x \text{ e } m_\lambda(x) = \lambda x.$$
- Então, basta utilizar $\varphi = t_b \circ m_{s/r} \circ t_{-a}$.

Observação

Num espaço métrico qualquer esse resultado pode não ser válido!

Exemplo 3

Ainda num espaço normado E, temos que $B(0, 1)$ e E são homeomorfos. De fato, bas considerar $f : E \to B(0, 1)$ pondo
$$f(x) = \frac{x}{\|x\| + 1}$$

Exemplos

Exemplo 4

A projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{p = (0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo.

Exemplos

Exemplo 4

A projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{p = (0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo.

Exemplo 5

O gráfico de uma função contínua $f : M \to N$ é homeomorfo a M.

Topologia e continuidade

Teorema

Seja $f : M \to N$ uma função contínua.

(a) Se $K \subset M$ é compacto, então $f(K)$ é compacto.

(b) Se $X \subset M$ é conexo, então $f(X)$ é conexo.

(c) Se f é um homeomorfismo, então $f(A)$ é aberto, seja qual for o aberto $A \subset M$.

(d) Se f é um homeomorfismo, então $f(S)$ é fechado, seja qual for o fechado $S \subset M$.

Operadores lineares limitados

Definição

Uma transformação linear entre espaços normados $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é uma função $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ tal que

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \eta, xi \in \mathcal{N}_1.$$

Operadores lineares limitados

Definição

Uma transformação linear entre espaços normados $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é uma função $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ tal que

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \eta, xi \in \mathcal{N}_1.$$

Exemplo 1

Se $dim\mathcal{N}_1 < \infty$, então toda transformação linear $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é contínua.

Operadores lineares limitados

Definição

Uma transformação linear entre espaços normados $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é uma função $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ tal que

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi), \ \forall\alpha \in \mathbb{K}, \forall\eta, xi \in \mathcal{N}_1.$$

Exemplo 1

Se $dim\mathcal{N}_1 < \infty$, então toda transformação linear $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é contínua.

Exemplo 2

Em $C[0, 1]$ temos o operador contínuo $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dado por

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Operadores lineares limitados

Definição

Uma transformação linear entre espaços normados $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é uma função $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ tal que

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \eta, xi \in \mathcal{N}_1.$$

Exemplo 1

Se $dim \mathcal{N}_1 < \infty$, então toda transformação linear $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é contínua.

Exemplo 2

Em $C[0, 1]$ temos o operador contínuo $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dado por

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Exemplo 3

Seja $D \subset C[0, 1]$ o subespaço do polinômios $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Então, o operador linear $T : D \to C[0, 1]$ dado por $Tp = p'$ não é contínuo.

Operadores lineares limitados

Teorema

São equivalentes:

(a) T é contínuo.

(b) T é contínuo em 0.

(c) Existe $C > 0$ tal que $\|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1$, para todo $\eta \in \mathcal{N}_1$

(d) $\sup_{\|\eta\| \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$