CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

FUNÇÕES CONTÍNUAS

DEFINIÇÃO

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(p)) < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x, p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

FUNÇÕES CONTÍNUAS

DEFINIÇÃO

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(p)) < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x, p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

PROPOSIÇÃO 1

Seja $f : M \to N$ uma função. Então, f é:

(a) contínua em M se, e somente se, para todo aberto $Y \subset N$, $f^{-1}(Y)$ aberto em M.

(b) descontínua num ponto $a \in M$ se, e somente se, existe um $\epsilon > 0$ satisfazendo o seguinte: dado qualquer $\delta > 0$, existe $x_\delta > 0$ tal que

$$d_M(x, \delta) < \delta \ \text{ e } \ d_N(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon$$

(c) contínua em a se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\}_{nin\mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \to a$, temos $f(x_n) \to f(a)$.

CONTINUIDADE UNIFORME

DEFINIÇÃO

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita uniformemente contínua quando para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$d_M(x,y) < \delta \longrightarrow d_N(f(x),f(y)) < \epsilon.$$

OBSERVAÇÃO

- Continuidade uniforme é uma propriedade global.
- Continuidade uniforme implica em continuidade.

ALGUMAS PROPRIEDADES

LEMA

(a) Composição de funções uniformemente contínuas resulta em uma função uniformemente contínua.

(b) A restrição de uma função uniformemente contínua é ainda uniformemente contínua.

(c) Se $f, g : M \to E$ são uniformemente contínuas e E um espaço normado, então $\lambda f + g$ é uniformemente contínua, sendo $\lambda \in \mathbb{K}$.

(d) $f : M \to N_1 \times N_2$ é uniformemente contínua se, e somente se, cada f_j o é.

(e) Funções contínuas definidas em compactos são uniformemente contínuas.

Exemplos

Exemplo 1

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, não é uniformemente contínua, porém o é em cada conjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Exemplo 2

Toda função Lipschitziana é uniformemente contínua.

Exemplo 3

A função $f : [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = x^{1/2}$ é uniformemente contínua, porém não é Lipschitziana.

Função de Urysohn

Teorema

Sejam F, G subconjuntos disjuntos e fechados de M com $d(F,G) > 0$. Existe uma função uniformemente contínua $f : M \to [0,1]$ tal que

$$f(x) = 0, \ \forall x \in F \ \text{ e } \ f(x) = 1, \ \forall x \in G.$$

Se $d(F,G) > 0$, então f é uniformemente contínua.

Observação

Se $d(F,G) = 0$, então a função de Urysohn não é uniformemente contínua.

Convergência e continuidade uniforme

Teorema 1

Uma função $f : M \to N$ é uniformemente contínua se, e somente se, para todo par de sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja válida a propriedade:

$$\lim d_M(x_n, y_n) \to 0 \Longrightarrow \lim d_N(f(x_n), f(y_n)) \to 0.$$

Teorema 2

Uma função uniformemente contínua leva sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.