CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Limites Funções

Definição

Sejam X um subconjunto de um espaço métrico M, $a \in \overline{X}$ e $f : X \to N$ uma função tomando valores no espaço métrico N. Dizemos que $b \in N$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a a se: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \ \text{ e } \ d(x, a) < \delta \Longrightarrow d(f(x), b) < \epsilon.$$

Neste caso, escrevemos $b = \lim_{x \to a} f(x)$.

Limites Funções

Definição

Sejam X um subconjunto de um espaço métrico M, $a \in \overline{X}$ e $f : X \to N$ uma função tomando valores no espaço métrico N. Dizemos que $b \in N$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a a se: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \text{ e } d(x,a) < \delta \Longrightarrow d(f(x),b) < \epsilon.$$

Neste caso, escrevemos $b = \lim_{x \to a} f(x)$.

Observação

Se $a \in X$, então $b = \lim_{x \to a} f(x)$ se, e somente se, f é contínua em a e vale $b = f(a)$.

Proposição 1

Seja $a \in \overline{X} \subset M$. Dada $f : X \to N$, tem-se $b = \lim_{x \to a} f(x)$ se, e somente se, para toda sequência $x_n \to a$, $x_n \in X$, valer $b = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$.

Proposição 1

Seja $a \in \overline{X} \subset M$. Dada $f : X \to N$, tem-se $b = \lim_{x \to a} f(x)$ se, e somente se, para toda sequência $x_n \to a$, $x_n \in X$, valer $b = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$.

Proposição 2

Sejam $X \subset M$ e $f : X \to N$ contínua. Suponha que para cada $a \in \overline{X}$ exista $\lim_{x \to a} f(x)$. Então, a função $F : \overline{X} \to M$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ \lim_{y \to x} f(y), & x \in \overline{X} \setminus X, \end{cases}$$

é contínua.

Proposição 1

Seja $a \in \overline{X} \subset M$. Dada $f : X \to N$, tem-se $b = \lim_{x \to a} f(x)$ se, e somente se, para toda sequência $x_n \to a$, $x_n \in X$, valer $b = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$.

Proposição 2

Sejam $X \subset M$ e $f : X \to N$ contínua. Suponha que para cada $a \in \overline{X}$ exista $\lim_{x \to a} f(x)$. Então, a função $F : \overline{X} \to M$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in X, \\ \lim_{y \to x} f(y), \ x \in \overline{X} \setminus X, \end{cases}$$

é contínua.

Teorema (Critério de Cauchy)

Seja $f : X \to N$ uma função definida num subconjunto X do espaço métrico M, com N completo. Dado $a \in \overline{X}$, afim de que exista $\lim_{x \to a} f(x)$, é necessário e suficiente que, para cada $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que se

$$x, y \in X, \ x, y \in B(a, \delta) \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Extensão

Definição

Sejam M, N espaços métricos, X um subconjunto de X e $f : X \to N$ uma função.

- Uma função $F : M \to N$ é dita uma extensão de f se

$$F(x) = f(x),\ \forall x \in X.$$

- Se f é contínua, então dizemos que f se estende continuamente a M quando possui uma extensão é contínua.

Extensão

Definição

Sejam M, N espaços métricos, X um subconjunto de X e $f : X \to N$ uma função.

- Uma função $F : M \to N$ é dita uma extensão de f se

$$F(x) = f(x), \ \forall x \in X.$$

- Se f é contínua, então dizemos que f se estende continuamente a M quando possui uma extensão é contínua.

Observação

Nem toda função contínua pode ser continuamente estendida ao espaço inteiro. Por exemplo, se $M = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ não poder ser estendida a $\mathbb{R}$ de modo contínuo.

Alguns resultados

Teorema 1

Sejam $X \subset M$ um subconjunto denso de M. Então toda função contínua $f : X \to N$ pode ser estendida continuamente se, e somente se, para cada $a \in M$ existe o limite

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Neste caso, a extensão é única.

Alguns resultados

Teorema 1

Sejam $X \subset M$ um subconjunto denso de M. Então toda função contínua $f : X \to N$ pode ser estendida continuamente se, e somente se, para cada $a \in M$ existe o limite

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Neste caso, a extensão é única.

Teorema 2

Sejam $f : X \to N$ um função uniformemente contínua em que X é denso e N completo. Então, f possui um única extensão contínua $F : M \to N$. Em particular, F é uniformemente contínua.