CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Funções contínuas

Definição

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(p)) < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x, p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

Operadores lineares limitados

Definição

Uma transformação linear entre espaços normados $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é uma função $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ tal que

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi), \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \eta, xi \in \mathcal{N}_1.$$

Teorema

Seja $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ uma transformação linear entre espaços normados $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$. São equivalentes:

(a) T é contínuo.

(b) T é contínuo em 0.

(c) Existe $C > 0$ tal que $\|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1$, para todo $\eta \in \mathcal{N}_1$

(d) $\sup_{\|\eta\| \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$

Exemplos

Exemplo 1

Se $dim \mathcal{N}_1 < \infty$, então toda transformação linear $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é contínua.

Exemplo 2

Em $C[0, 1]$ temos o operador contínuo $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dado por

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Exemplo 3

Seja $D \subset C[0, 1]$ o subespaço do polinômios $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Então, o operador linear $T : D \to C[0, 1]$ dado por $Tp = p'$ não é contínuo.

Observação

- Um operador linear contínuo é também chamado de limitado.
- O espaço dos operadores lineares limitados $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ será denotado por $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$
- No caso $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, escreve-se apenas $\mathcal{B}(\mathcal{N})$.
- Note que $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço vetorial munido das operações usuais

Teorema

Para cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ considere o número

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)} \doteq \sup_{\eta \in \mathcal{N}_1, \eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}. \tag{1}$$

Então,

(a) (1) é uma norma em $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$

(b) Valem as igualdades

$$\sup_{\eta \in \mathcal{N}_1, \eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1} = \sup_{\|\eta\|_1 = 1} \|T\eta\|_2 = \sup_{\|\eta\|_1 \leq 1} \|T\eta\|_2 = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_1} \{C > 0;\ \|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1\}.$$

(c) $\|T\eta\| \leq \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)} \|\eta\|_1$.

(d) Se $\mathcal{N}_2$ é Banach, então o mesmo vale para $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.