CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Convergência pontual

Definição: convergência pontual

Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que uma sequência de funções $f_n : M \to N$ converge pontualmente para f se, para cada $x \in M$, tivermos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

ou seja, dado $x \in M$ obtemos para cada $\epsilon > 0$ um $n_0 = n_0(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies d_N(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Convergência pontual

Definição: convergência pontual

Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que uma sequência de funções $f_n : M \to N$ converge pontualmente para f se, para cada $x \in M$, tivermos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

ou seja, dado $x \in M$ obtemos para cada $\epsilon > 0$ um $n_0 = n_0(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies d_N(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Exemplo 1

A sequência $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x/n$ converge pontualmente para a função nula em qualquer conjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Exemplo 2

A sequência $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ converge pontualmente para a função $f(x) = 0$ para $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 1$.

Convergência uniforme

Definição: convergência uniforme

Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que uma sequência de funções $f_n : M \to N$ converge uniformemente para f quando para todo $\epsilon > 0$ existir $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d_N(f_n(x), f(x)) < \epsilon, \ \forall x \in M.$$

Convergência uniforme

Definição: convergência uniforme

Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que uma sequência de funções $f_n : M \to N$ converge uniformemente para f quando para todo $\epsilon > 0$ existir $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d_N(f_n(x), f(x)) < \epsilon, \ \forall x \in M.$$

Observação

- Convergência uniforme implica em convergência pontual.
- Note que se $\mathscr{B}(M, N)$ é o conjunto das funções limitadas de M para N, então

  $$d(f, g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x))$$

  é uma métrica em $\mathscr{B}(M, N)$. Em particular, a convergência de sequências em $\mathscr{B}(M, N)$ é justamente a convergência uniforme.

Teorema 1

Sejam M, N espaços métricos e $f_n : M \to N$ uma sequência de funções contínuas em $a \in M$. Se f_n converge uniformemente para $f : M \to N$, então f é contínua em a.

Teorema 1

Sejam M, N espaços métricos e $f_n : M \to N$ uma sequência de funções contínuas em $a \in M$. Se f_n converge uniformemente para $f : M \to N$, então f é contínua em a.

Corolário

Sejam M, N espaços métricos e $f_n : M \to N$ uma sequência de funções contínuas. Se f_n converge uniformemente para $f : M \to N$, então f.

Teorema 1

Sejam M,N espaços métricos e $f_n : M \to N$ uma sequência de funções contínuas em $a \in M$. Se f_n converge uniformemente para $f : M \to N$, então f é contínua em a.

Corolário

Sejam M,N espaços métricos e $f_n : M \to N$ uma sequência de funções contínuas. Se f_n converge uniformemente para $f : M \to N$, então f.

Teorema 2

Se N é completo, então $\mathscr{B}(M,N)$ também o é.

Aplicação: Séries

Definição

Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ um sequência. Denotaremos por $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Dizemos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é absolutamente convergente se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge.

Aplicação: Séries

Definição

Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ um sequência. Denotaremos por $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Dizemos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é absolutamente convergente se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge.

Teorema

Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado completo (Banach), então toda série absolutamente convergente é convergente em $\mathcal{N}$.

Aplicação: Séries

Definição

Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ um sequência. Denotaremos por $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Dizemos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é absolutamente convergente se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge.

Teorema

Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado completo (Banach), então toda série absolutamente convergente é convergente em $\mathcal{N}$.

Observação

Se $\mathcal{N}$ não é um espaço completo, então uma série absolutamente convergente pode não ser convergente em $\mathcal{N}$.

Exemplo

Exemplo

Considere $\mathcal{N}$ é um espaço normado completo e $T \in \mathscr{B}(\mathcal{N})$ (op. lineares contínuos) tal que $\|T\|_{\mathscr{B}} < 1$. Nestas condições:

- $\sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathscr{B}(\mathcal{N})$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = (I - T)^{-1}$.