CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Convergência pontual

Definição: convergência pontual

Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que uma sequência de funções $f_n : M \to N$ converge pontualmente para f se, para cada $x \in M$, tivermos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

ou seja, dado $x \in M$ obtemos para cada $\epsilon > 0$ um $n_0 = n_0(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies d_N(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Definição: convergência uniforme

Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que uma sequência de funções $f_n : M \to N$ converge uniformemente para f quando para todo $\epsilon > 0$ existir $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies d_N(f_n(x), f(x)) < \epsilon, \ \forall x \in M.$$

Teorema de aproximação

Teorema (Weierstrass)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe uma sequência de polinômios P_n que converge uniformemente para f em $[a, b]$.