CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

DEFINIÇÃO

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos τ de X é uma topologia se:

(a) $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$.

(b) A **união qualquer** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

(c) A **interseção de uma quantidade finita** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

Definição

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos τ de X é uma topologia se:

(a) $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$.

(b) A **união qualquer** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

(c) A **interseção de uma quantidade finita** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

- Neste caso, temos o espaço topológico (X, τ).
- Os elementos de τ são chamados de abertos.

Exemplos

Exemplo 1 (Topologia métrica)

Os abertos de um espaços métrico M formam a chamada topologia métrica. Por outro lado, um espaço topológico τ, num conjunto X, se diz metrizável se existe uma métrica d em X de modo que τ coincida com a topologia de (X, d).

Exemplos

Exemplo 1 (Topologia métrica)

Os abertos de um espaços métrico M formam a chamada topologia métrica. Por outro lado, um espaço topológico τ, num conjunto X, se diz metrizável se existe uma métrica d em X de modo que τ coincida com a topologia de (X, d).

Exemplo 2 (Topologia discreta)

Dado um conjunto X, então $\tau = \mathscr{P}(X)$ (conjunto das partes) é uma topologia em X.

Exemplos

Exemplo 1 (Topologia métrica)

Os abertos de um espaços métrico M formam a chamada topologia métrica. Por outro lado, um espaço topológico τ, num conjunto X, se diz metrizável se existe uma métrica d em X de modo que τ coincida com a topologia de (X, d).

Exemplo 2 (Topologia discreta)

Dado um conjunto X, então $\tau = \mathscr{P}(X)$ (conjunto das partes) é uma topologia em X.

Exemplo 3 (Topologia caótica)

Para todo $X \neq \emptyset$, temos a topologia $\tau = \{X, \emptyset\}$.

Exemplo 4

Seja $X = \{a, b, c, d\}$. Então, podemos definir a topologia

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$$

Exemplo 4

Seja $X = \{a, b, c, d\}$. Então, podemos definir a topologia

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$$

Exemplo 5 (Topologia cofinita)

Seja X um conjunto infinito. Então, podemos definir a topologia

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X;\ A^c \text{ é finito.}\}$$

Exemplos

Exemplo 4

Seja $X = \{a, b, c, d\}$. Então, podemos definir a topologia

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$$

Exemplo 5 (Topologia cofinita)

Seja X um conjunto infinito. Então, podemos definir a topologia

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X;\ A^c \text{ é finito.}\}$$

Exemplo 6 (Topologia coenumerável)

Seja X um conjunto infinito. Então, podemos definir a topologia

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X;\ A^c \text{ é enumerável.}\}$$

Exemplo 6 (Topologia produto)

Sejam (X, τ) e (T, β) dois espaços topológicos. Podemos então definir em $X \times Y$ a topologia

$$\gamma = \{A \times B,\ A \in \tau, B \in \beta\}.$$

EXEMPLO 6 (TOPOLOGIA PRODUTO)

Sejam (X, τ) e (T, β) dois espaços topológicos. Podemos então definir em $X \times Y$ a topologia

$$\gamma = \{A \times B,\ A \in \tau, B \in \beta\}.$$

EXEMPLO 7 (TOPOLOGIA INDUZIDA)

Sejam (X, τ) e $A \subset X$ um subconjunto. Podemos então induzir em A a seguinte topologia:

$$\tau_A = \{A \cap U;\ U \in \tau\}.$$

Em particular, (A, τ_A) é um espaço topológico.

Definição

Sejam (X, τ) e $A \subset X$ um subconjunto. O conjunto interior de A é definido da seguinte forma

$$int(A) = \bigcup_{W \subseteq A,\ W \in \tau} W$$

Interior

Definição

Sejam (X, τ) e $A \subset X$ um subconjunto. O conjunto interior de A é definido da seguinte forma

$$int(A) = \bigcup_{W \subseteq A,\ W \in \tau} W$$

Observação

- $p \in int(A)$ se, e somente se, existe $W \in \tau$ satisfazendo $p \in W \subseteq A$.
- $int(A) \subset A$.
- $A = int(A)$ se, e somente se, $A \in \tau$.

Interior

Definição

Sejam (X, τ) e $A \subset X$ um subconjunto. O conjunto interior de A é definido da seguinte forma

$$int(A) = \bigcup_{W \subseteq A,\ W \in \tau} W$$

Observação

- $p \in int(A)$ se, e somente se, existe $W \in \tau$ satisfazendo $p \in W \subseteq A$.
- $int(A) \subset A$.
- $A = int(A)$ se, e somente se, $A \in \tau$.

Exemplos

- O interior do intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, com respeito a topologia métrica usual é (a, b).
- O interior do intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, com respeito a topologia cofinita é vazio.

Definição

Seja (X, τ). Um conjunto $F \subset X$ é dito fechado se $F^c \in \tau$.

Definição

Seja (X, τ). Um conjunto $F \subset X$ é dito fechado se $F^c \in \tau$.

Proposição

Sejam (X, τ) e $\mathscr{F}$ a coleção de todos os seus fechados.

(a) $\emptyset, X \in \mathscr{F}$.

(b) União finita de elementos de $\mathscr{F}$ pertence a $\mathscr{F}$.

(b) Interseção qualquer de elementos de $\mathscr{F}$ pertence a $\mathscr{F}$.

Fecho

Definição

Sejam (X, τ) e $A \subset X$ um subconjunto. O fecho de A é o conjunto definido da seguinte forma

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathscr{F},\ A \subset F} F$$

Fecho

Definição

Sejam (X,τ) e $A \subset X$ um subconjunto. O fecho de A é o conjunto definido da seguinte forma

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathscr{F},\ A \subset F} F$$

Observação

- $\overline{A} \in \mathscr{F}$
- $\overline{A}$ é o menor fechado que contém A.
- $A = \overline{A}$ se, e somente se, A é fechado.

Fecho

Definição

Sejam (X, τ) e $A \subset X$ um subconjunto. O fecho de A é o conjunto definido da seguinte forma

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathscr{F},\ A \subset F} F$$

Observação

- $\overline{A} \in \mathscr{F}$
- $\overline{A}$ é o menor fechado que contém A.
- $A = \overline{A}$ se, e somente se, A é fechado.

Proposição

Temos $p \in \overline{A}$ se, e somente se, $U \cap A \neq \emptyset$, para todo aberto U que contém p.

DEFINIÇÃO

Sejam (X, τ) e $A \subset X$ um subconjunto. Dizemos que $p \in X$ é ponto de acumulação de A se

$$A \cap (W \setminus \{p\}) \neq \emptyset,$$

para todo aberto W que contém p.

Pontos de acumulação

Definição

Sejam (X, τ) e $A \subset X$ um subconjunto. Dizemos que $p \in X$ é ponto de acumulação de A se

$$A \cap (W \setminus \{p\}) \neq \emptyset,$$

para todo aberto W que contém p.

- O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado de derivado e indicado por A'.
- Note que $A' \subset \overline{A}$.

DEFINIÇÃO

Sejam (X, τ) e $A \subset X$ um subconjunto. Dizemos que $p \in X$ é ponto de acumulação de A se

$$A \cap (W \setminus \{p\}) \neq \emptyset,$$

para todo aberto W que contém p.

- O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado de derivado e indicado por A'.
- Note que $A' \subset \overline{A}$.

EXEMPLO

Seja $A = \{1/n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

- Em $\mathbb{R}$, com a topologia usual, $A' = \{0\}$.
- Em $\mathbb{R}$, com a topologia cofinita, $A' = \mathbb{R}$.