

# CMM 242

## Espaços Métricos

### S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva  
Dep. de Matemática - UFPR



### DEFINIÇÃO

Seja  $X$  um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos  $\tau$  de  $X$  é uma topologia se:

- (a)  $X \in \tau$  e  $\emptyset \in \tau$ .
- (b) A **união qualquer** de elementos de  $\tau$  ainda é um elemento de  $\tau$ .
- (c) A **interseção de uma quantidade finita** de elementos de  $\tau$  ainda é um elemento de  $\tau$ .

### DEFINIÇÃO

Seja  $X$  um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos  $\tau$  de  $X$  é uma topologia se:

- (a)  $X \in \tau$  e  $\emptyset \in \tau$ .
- (b) A **união qualquer** de elementos de  $\tau$  ainda é um elemento de  $\tau$ .
- (c) A **interseção de uma quantidade finita** de elementos de  $\tau$  ainda é um elemento de  $\tau$ .
  - Neste caso, temos o espaço topológico  $(X, \tau)$ .
  - Os elementos de  $\tau$  são chamados de abertos.

# CONVERGÊNCIA

## DEFINIÇÃO

Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de pontos em  $X$ . Dizemos que  $x_n$  converge para  $p \in X$  se para qualquer aberto  $U$  que contém  $p$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \implies x_n \in U.$$

Neste caso, escrevemos  $x_n \rightarrow p$ , ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ .

# CONVERGÊNCIA

## DEFINIÇÃO

Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de pontos em  $X$ . Dizemos que  $x_n$  converge para  $p \in X$  se para qualquer aberto  $U$  que contém  $p$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \implies x_n \in U.$$

Neste caso, escrevemos  $x_n \rightarrow p$ , ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ .

## EXEMPLO

Considere  $X = \{a, b, c, d\}$  e  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}\}$ . Então, para a sequência constante  $x_n = a$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

## AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é  $T_1$  (ou Fréchet) se vale a seguinte propriedade:

- Para qualquer  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ , existem abertos  $u \in U_x$  e  $y \in U_y$  tais que

$$x \notin U_y \text{ e } y \notin U_x.$$

## AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é  $T_1$  (ou Fréchet) se vale a seguinte propriedade:

- Para qualquer  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ , existem abertos  $u \in U_x$  e  $y \in U_y$  tais que

$$x \notin U_y \text{ e } y \notin U_x.$$

### EXEMPLO

A topologia cofinita satisfaz  $T_1$ .

## AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é  $T_1$  (ou Fréchet) se vale a seguinte propriedade:

- Para qualquer  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ , existem abertos  $u \in U_x$  e  $y \in U_y$  tais que

$$x \notin U_y \text{ e } y \notin U_x.$$

### EXEMPLO

A topologia cofinita satisfaz  $T_1$ .

### PROPOSIÇÃO

Um espaço  $X$  é  $T_1$  se, e somente se,  $\{p\}$  é fechado para qualquer  $p \in X$ .

## AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é  $T_2$ , ou mais usualmente Hausdorff, se vale a seguinte propriedade:

- Para qualquer  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ , existem abertos  $U_x$  e  $U_y$  tais que

$$U_x \cap U_y = \emptyset.$$

## AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é  $T_2$ , ou mais usualmente Hausdorff, se vale a seguinte propriedade:

- Para qualquer  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ , existem abertos  $U_x$  e  $U_y$  tais que

$$U_x \cap U_y = \emptyset.$$

- $T_2$  implica  $T_1$ .

## AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é  $T_2$ , ou mais usualmente Hausdorff, se vale a seguinte propriedade:

- Para qualquer  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ , existem abertos  $U_x$  e  $U_y$  tais que

$$U_x \cap U_y = \emptyset.$$

- $T_2$  implica  $T_1$ .

### EXEMPLO

A topologia métrica é Hausdorff.

## AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é  $T_2$ , ou mais usualmente Hausdorff, se vale a seguinte propriedade:

- Para qualquer  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ , existem abertos  $U_x$  e  $U_y$  tais que

$$U_x \cap U_y = \emptyset.$$

- $T_2$  implica  $T_1$ .

### EXEMPLO

A topologia métrica é Hausdorff.

### PROPOSIÇÃO

Sequências convergentes em espaços Hausdorff tem único limite.

## DEFINIÇÃO

Sejam  $X$  um conjunto e  $\mathcal{B}$  uma coleção de subconjuntos de  $X$  satisfazendo a seguintes propriedades:

- (i) Para cada  $x \in X$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ .
- (ii) Se  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , então existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

## DEFINIÇÃO

Sejam  $X$  um conjunto e  $\mathcal{B}$  uma coleção de subconjuntos de  $X$  satisfazendo a seguintes propriedades:

- (i) Para cada  $x \in X$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ .
- (ii) Se  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , então existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Considere então a coleção  $\tau_{\mathcal{B}}$  de subconjuntos de  $X$  definidas da seguinte forma:

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subset X, \text{ tal que } \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, \text{ satisfazendo } x \in B \subset U\}.$$

**DEFINIÇÃO**

Sejam  $X$  um conjunto e  $\mathcal{B}$  uma coleção de subconjuntos de  $X$  satisfazendo a seguintes propriedades:

- (i) Para cada  $x \in X$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ .
- (ii) Se  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , então existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Considere então a coleção  $\tau_{\mathcal{B}}$  de subconjuntos de  $X$  definidas da seguinte forma:

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subset X, \text{ tal que } \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, \text{ satisfazendo } x \in B \subset U\}.$$

**TEOREMA**

A coleção  $\tau_{\mathcal{B}}$  define uma topologia em  $X$ .

## ALGUNS NOMES E EXEMPLOS

### OBSERVAÇÃO

- Temos  $\mathcal{B} \subset \tau_{\mathcal{B}}$ .
- Dizemos que  $\tau_{\mathcal{B}}$  é a topologia gerada por  $\mathcal{B}$ .
- A coleção  $\mathcal{B}$  é chamada de base da topologia  $\tau_{\mathcal{B}}$ .
- Dizemos que  $B \in \mathcal{B}$  é um elemento da base  $\mathcal{B}$ .

## ALGUNS NOMES E EXEMPLOS

### OBSERVAÇÃO

- Temos  $\mathcal{B} \subset \tau_{\mathcal{B}}$ .
- Dizemos que  $\tau_{\mathcal{B}}$  é a topologia gerada por  $\mathcal{B}$ .
- A coleção  $\mathcal{B}$  é chamada de base da topologia  $\tau_{\mathcal{B}}$ .
- Dizemos que  $B \in \mathcal{B}$  é um elemento da base  $\mathcal{B}$ .

### EXEMPLO 1

Num espaço métrico, a coleção de todas as bolas abertas define uma base para a topologia métrica.

## ALGUNS NOMES E EXEMPLOS

### OBSERVAÇÃO

- Temos  $\mathcal{B} \subset \tau_{\mathcal{B}}$ .
- Dizemos que  $\tau_{\mathcal{B}}$  é a topologia gerada por  $\mathcal{B}$ .
- A coleção  $\mathcal{B}$  é chamada de base da topologia  $\tau_{\mathcal{B}}$ .
- Dizemos que  $B \in \mathcal{B}$  é um elemento da base  $\mathcal{B}$ .

### EXEMPLO 1

Num espaço métrico, a coleção de todas as bolas abertas define uma base para a topologia métrica.

### EXEMPLO 2

Se em  $X$  considerarmos a topologia discreta, então a coleção de todos os conjuntos unitários formam uma base topológica.

### DEFINIÇÃO

Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $p \in X$  um ponto. Uma coleção  $\mathcal{B}_p$  se diz uma base local em  $p$  se:

- (i)  $p \in B$ , para todo  $B \in \mathcal{B}$ .
- (ii) Se  $p \in A$ , com  $A \in \tau$ , então existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in B \subset A$ .

### DEFINIÇÃO

Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $p \in X$  um ponto. Uma coleção  $\mathcal{B}_p$  se diz uma base local em  $p$  se:

- (i)  $p \in B$ , para todo  $B \in \mathcal{B}$ .
- (ii) Se  $p \in A$ , com  $A \in \tau$ , então existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in B \subset A$ .

### EXEMPLOS

- A coleção de todos abertos de  $X$  que contém  $p$  é uma base local em  $p$ .
- Num espaço métrico, temos  $\mathcal{B}_p = \{B(p, 1/n), n \in \mathbb{N}\}$ .

## MAIS AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

- Dizemos que um espaço topológico satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade** se cada ponto possui uma base local enumerável.

## MAIS AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

- Dizemos que um espaço topológico satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade** se cada ponto possui uma base local enumerável.
- Dizemos que um espaço topológico satisfaz o **segundo axioma de enumerabilidade** se existe uma base enumerável.

## MAIS AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

- Dizemos que um espaço topológico satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade** se cada ponto possui uma base local enumerável.
- Dizemos que um espaço topológico satisfaz o **segundo axioma de enumerabilidade** se existe uma base enumerável.
- Um espaço  $X$  no qual conjuntos unitários são fechados é dito **regular** se para cada  $x \in X$  e cada conjunto fechado  $F$ , com  $x \notin F$ , existem abertos disjuntos contendo  $x$  e  $F$ . (Em particular, espaço regular é Hausdorff.)

## MAIS AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

### DEFINIÇÃO

- Dizemos que um espaço topológico satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade** se cada ponto possui uma base local enumerável.
- Dizemos que um espaço topológico satisfaz o **segundo axioma de enumerabilidade** se existe uma base enumerável.
- Um espaço  $X$  no qual conjuntos unitários são fechados é dito **regular** se para cada  $x \in X$  e cada conjunto fechado  $F$ , com  $x \notin F$ , existem abertos disjuntos contendo  $x$  e  $F$ . (Em particular, espaço regular é Hausdorff.)
- Um espaço  $X$  no qual conjuntos unitários são fechados é dito **normal** se todo par de conjuntos fechados estiver contido em abertos disjuntos.

## TEOREMA DE URYSOHN

### TEOREMA

Todo espaço regular que satisfaz o segundo axioma de separação é metrizable.