CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Métrica

Definição

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(D1) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$.

(D2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$. (Simetria)

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M$. (Desigualdade Triangular)

Neste caso, dizemos que $M = (M, d)$ é um espaço métrico.

Bolas

Definição

Sejam M um espaço métrico, $x_0 \in M$ um ponto e $r > 0$.

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{x \in M;\ d(x, x_0) < r\} \text{ (Bola aberta)}$$
$$B_r[x_0] = B[x_0, r] = \{x \in M;\ d(x, x_0) \leq r\} \text{ (Bola fechada)}$$
$$\mathbb{S}_r(x_0) = \mathbb{S}[x_0, r] = \{x \in M;\ d(x, x_0) = r\} \text{ (Esfera)}$$

Teorema

Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ um subconjunto e $p \in M$ um ponto.

Teorema

Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ um subconjunto e $p \in M$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.

Teorema

Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ um subconjunto e $p \in M$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.

(b) Dizemos que A é um conjunto aberto se $A = int(A)$.

TEOREMA

Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ um subconjunto e $p \in M$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.

(b) Dizemos que A é um conjunto aberto se $A = int(A)$.

OBSERVAÇÕES

(a) $int(A) \subset A$.

Conjuntos abertos

Teorema

Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ um subconjunto e $p \in M$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.

(b) Dizemos que A é um conjunto aberto se $A = int(A)$.

Observações

(a) $int(A) \subset A$.

(b) Um conjunto é aberto se, e somente se, todos seus pontos são interiores, ou seja, se para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $B_{r_a}(a) \subset A$.

Teorema

Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ um subconjunto e $p \in M$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.

(b) Dizemos que A é um conjunto aberto se $A = int(A)$.

Observações

(a) $int(A) \subset A$.

(b) Um conjunto é aberto se, e somente se, todos seus pontos são interiores, ou seja, se para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $B_{r_a}(a) \subset A$.

(c) $\emptyset$ é aberto.

Teorema

Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ um subconjunto e $p \in M$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.

(b) Dizemos que A é um conjunto aberto se $A = int(A)$.

Observações

(a) $int(A) \subset A$.

(b) Um conjunto é aberto se, e somente se, todos seus pontos são interiores, ou seja, se para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $B_{r_a}(a) \subset A$.

(c) $\emptyset$ é aberto.

(d) M é aberto.

Conjuntos abertos

Teorema

Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ um subconjunto e $p \in M$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.

(b) Dizemos que A é um conjunto aberto se $A = int(A)$.

Observações

(a) $int(A) \subset A$.

(b) Um conjunto é aberto se, e somente se, todos seus pontos são interiores, ou seja, se para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $B_{r_a}(a) \subset A$.

(c) $\emptyset$ é aberto.

(d) M é aberto.

(e) A bola aberta é um conjunto aberto.

TEOREMA

Sejam M um espaço métrico e Γ a coleção de todos os conjuntos abertos de M. Então:

Teorema

Sejam M um espaço métrico e Γ a coleção de todos os conjuntos abertos de M. Então:

(a) $M \in \Gamma$ e $\emptyset \in \Gamma$.

TEOREMA

Sejam M um espaço métrico e Γ a coleção de todos os conjuntos abertos de M. Então:

(a) $M \in \Gamma$ e $\emptyset \in \Gamma$.

(b) Uma **união qualquer** de elementos de Γ ainda é um elemento de Γ.

TEOREMA

Sejam M um espaço métrico e Γ a coleção de todos os conjuntos abertos de M. Então:

(a) $M \in \Gamma$ e $\emptyset \in \Gamma$.

(b) Uma **união qualquer** de elementos de Γ ainda é um elemento de Γ.

(c) A **interseção de uma quantidade finita** de elementos de Γ ainda é um elemento de Γ.

Definição

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos τ de X é uma topologia se:

Definição

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos τ de X é uma topologia se:

(a) $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$.

Definição

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos τ de X é uma topologia se:

(a) $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$.

(b) A **união qualquer** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

DEFINIÇÃO

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos τ de X é uma topologia se:

(a) $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$.

(b) A **união qualquer** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

(c) A **interseção de uma quantidade finita** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

Espaço topológico

Definição

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos τ de X é uma topologia se:

(a) $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$.

(b) A **união qualquer** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

(c) A **interseção de uma quantidade finita** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

Teorema

Num espaço métrico a coleção de todos os abertos define uma topologia chamada *topologia métrica*.

Definição

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos τ de X é uma topologia se:

(a) $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$.

(b) A **união qualquer** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

(c) A **interseção de uma quantidade finita** de elementos de τ ainda é um elemento de τ.

Teorema

Num espaço métrico a coleção de todos os abertos define uma topologia chamada *topologia métrica*.

Teorema

Sejam M um espaço métrico e $x, y \in M$ tais que $x \neq y$. Então, existe $r > 0$ satisfazendo

$$B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset.$$