CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Aderência e acumulação

Aderência e acumulação

Definição

Sejam M um espaço métrico, $p \in M$ um ponto e $A \subset M$ um conjunto.

(a) Dizemos que p é um ponto **aderente** de A se

$$\forall \epsilon > 0,\ B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes de A é chamado de **fecho** e denotado por $\overline{A}$.

Aderência e acumulação

Definição

Sejam M um espaço métrico, $p \in M$ um ponto e $A \subset M$ um conjunto.

(a) Dizemos que p é um ponto **aderente** de A se

$$\forall \epsilon > 0,\ B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes de A é chamado de **fecho** e denotado por $\overline{A}$.

(b) Dizemos que p é um ponto de **acumulação** de A se

$$\forall \epsilon > 0,\ B(p, \epsilon) \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes de A é chamado de **derivado** e denotado por A'.

Aderência e acumulação

Definição

Sejam M um espaço métrico, $p \in M$ um ponto e $A \subset M$ um conjunto.

(a) Dizemos que p é um ponto **aderente** de A se

$$\forall \epsilon > 0,\ B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes de A é chamado de **fecho** e denotado por $\overline{A}$.

(b) Dizemos que p é um ponto de **acumulação** de A se

$$\forall \epsilon > 0,\ B(p, \epsilon) \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes de A é chamado de **derivado** e denotado por A'.

Observações

$$A \subset \overline{A},\ A' \subset \overline{A},\ \overline{M} = M,\ \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

Conjuntos fechados

Definição

Dizemos que um subconjunto F de um espaço métrico M é fechado se seu complementar

$$F^c = M \setminus F = \{x \in M;\ x \notin F\}$$

é aberto.

Conjuntos fechados

Definição

Dizemos que um subconjunto F de um espaço métrico M é fechado se seu complementar

$$F^c = M \setminus F = \{x \in M;\ x \notin F\}$$

é aberto.

Observações

- M e $\emptyset$ são conjuntos fechados.
- Existem conjuntos que não fechados e nem abertos.

Conjuntos fechados

Definição

Dizemos que um subconjunto F de um espaço métrico M é fechado se seu complementar

$$F^c = M \setminus F = \{x \in M;\ x \notin F\}$$

é aberto.

Observações

- M e $\emptyset$ são conjuntos fechados.
- Existem conjuntos que não fechados e nem abertos.

Exercício

Quais são os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são ao mesmo tempo abertos e fechados? E em $\mathbb{R}^n$?

Conjuntos fechados

Definição

Dizemos que um subconjunto F de um espaço métrico M é fechado se seu complementar

$$F^c = M \setminus F = \{x \in M;\ x \notin F\}$$

é aberto.

Observações

- M e $\emptyset$ são conjuntos fechados.
- Existem conjuntos que não fechados e nem abertos.

Exercício

Quais são os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são ao mesmo tempo abertos e fechados? E em $\mathbb{R}^n$?

Proposição

Um conjunto F é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$.

Teorema

Sejam M um espaço métrico e $\mathcal{F}$ a coleção de todos os conjuntos fechados de M. Então:

(a) $M \in \mathcal{F}$ e $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(b) Uma **união de uma quantidade finita** de elementos de $\mathcal{F}$ ainda é um elemento de $\mathcal{F}$.

(c) A **interseção de uma quantidade qualquer** de elementos de $\mathcal{F}$ ainda está em $\mathcal{F}$.

Topologia relativa

Definição

Sejam M um espaços métrico e $A \subset M$ um subconjunto qualquer.

Topologia relativa

Definição

Sejam M um espaços métrico e $A \subset M$ um subconjunto qualquer.

(a) Dizemos que um subconjunto $X \subset A$ é um **aberto de A** se existe um aberto W de M tal que

$$X = A \cap W.$$

Topologia relativa

Definição

Sejam M um espaços métrico e $A \subset M$ um subconjunto qualquer.

(a) Dizemos que um subconjunto $X \subset A$ é um **aberto de A** se existe um aberto W de M tal que

$$X = A \cap W.$$

(b) Dizemos que um subconjunto $X \subset A$ é um **fechado de A** se existe um fechado F de M tal que

$$X = A \cap F.$$

Topologia relativa

Definição

Sejam M um espaços métrico e $A \subset M$ um subconjunto qualquer.

(a) Dizemos que um subconjunto $X \subset A$ é um **aberto de A** se existe um aberto W de M tal que
$$X = A \cap W.$$

(b) Dizemos que um subconjunto $X \subset A$ é um **fechado de A** se existe um fechado F de M tal que
$$X = A \cap F.$$

Exercício

Denote por τ_X o conjunto de todos os abertos relativos de X. Mostre que τ_X define uma topologia em X.

Topologia relativa

Definição

Sejam M um espaços métrico e $A \subset M$ um subconjunto qualquer.

(a) Dizemos que um subconjunto $X \subset A$ é um **aberto de A** se existe um aberto W de M tal que
$$X = A \cap W.$$

(b) Dizemos que um subconjunto $X \subset A$ é um **fechado de A** se existe um fechado F de M tal que
$$X = A \cap F.$$

Exercício

Denote por τ_X o conjunto de todos os abertos relativos de X. Mostre que τ_X define uma topologia em X.

Exercício

Mostre que o teorema do slide anterior continua válido quando restringimos ao conjunto de todos os fechados relativos de X.

Densidade

Densidade

Relembrando:

- Um conjunto X é dito enumerável se for finito, ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.
- São exemplos de conjuntos infinitos e enumeráveis: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Densidade

Relembrando:

- Um conjunto X é dito enumerável se for finito, ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.
- São exemplos de conjuntos infinitos e enumeráveis: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Definição

Seja M um espaço métrico.

(a) Dizemos que um subconjunto $A \subset M$ é denso em M se $\overline{A} = M$.

(b) Dizemos que M é um espaço métrico separável se possui um subconjunto denso e enumerável.

Exemplos

Exemplos

Triviais

Exemplos

Triviais

- Os espaços $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^n$ são separáveis.

EXEMPLOS

TRIVIAIS

- Os espaços $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^n$ são separáveis.
- Um espaço métrico discreto é separável se, e somente se, é enumerável.

Exemplos

Triviais

- Os espaços $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^n$ são separáveis.
- Um espaço métrico discreto é separável se, e somente se, é enumerável.

Um pouco mais interessantes

- Os espaços ℓ^p, com $p \geq 1$, são separáveis.

Exemplos

Triviais

- Os espaços $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^n$ são separáveis.
- Um espaço métrico discreto é separável se, e somente se, é enumerável.

Um pouco mais interessantes

- Os espaços ℓ^p, com $p \geq 1$, são separáveis.
- ℓ^∞ não é separável.

Sequências convergentes

Sequências convergentes

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente num um espaço métrico M se existe um $p \in M$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(p, \epsilon), \ \forall n \geq N.$$

- Quando existe tal ponto p ele é único.

Sequências convergentes

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente num um espaço métrico M se existe um $p \in M$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(p,\epsilon),\ \forall n \geq N.$$

- Quando existe tal ponto p ele é único.
- Utilizamos as notações

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \ \text{ e } \ x_n \to p.$$

Sequências convergentes

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente num um espaço métrico M se existe um $p \in M$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(p,\epsilon), \ \forall n \geq N.$$

- Quando existe tal ponto p ele é único.
- Utilizamos as notações
$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \ \text{ e } \ x_n \to p.$$
- Note que $x_n \to p$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$d(x_n, p) < \epsilon, \ \ \forall n \geq N.$$

Sequências convergentes

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente num um espaço métrico M se existe um $p \in M$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(p, \epsilon), \ \forall n \geq N.$$

- Quando existe tal ponto p ele é único.
- Utilizamos as notações
$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \ \text{ e } \ x_n \to p.$$
- Note que $x_n \to p$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$d(x_n, p) < \epsilon, \ \ \forall n \geq N.$$
- Toda sequência convergente é limitada. (Não vale a recíproca.)

Sequências de Cauchy

Sequências de Cauchy

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico M é de Cauchy se: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Sequências de Cauchy

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico M é de Cauchy se: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Proposição

(a) Toda sequência de Cauchy é limitada.

Sequências de Cauchy

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico M é de Cauchy se: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Proposição

(a) Toda sequência de Cauchy é limitada.

(b) Toda sequência convergente é de Cauchy.

Sequências de Cauchy

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico M é de Cauchy se: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Proposição

(a) Toda sequência de Cauchy é limitada.

(b) Toda sequência convergente é de Cauchy.

IMPORTANTE

Em geral, não vale a recíproca do item (b).

Espaço métrico completo

Espaço métrico completo

Definição

Dizemos que um espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Espaço métrico completo

Definição

Dizemos que um espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Espaço de Banach

Um espaço normado $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ é dito de Banack se for completo com respeito a métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Espaço métrico completo

Definição

Dizemos que um espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Espaço de Banach

Um espaço normado $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ é dito de Banack se for completo com respeito a métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Espaço de Hilbert

Um espaço com produto interno $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é dito de Hilbert se for completo com respeito a métrica

$$d(x, y) = (\langle x - y, x - y \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Espaço métrico completo

Definição

Dizemos que um espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Espaço de Banach

Um espaço normado $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ é dito de Banack se for completo com respeito a métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Espaço de Hilbert

Um espaço com produto interno $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é dito de Hilbert se for completo com respeito a métrica

$$d(x, y) = (\langle x - y, x - y\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Exemplos

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são completos.
- ℓ^p é completo, $1 \leq p \leq \infty$.