CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Sequências convergentes

Sequências convergentes

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente num um espaço métrico M se existe um $p \in M$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(p, \epsilon), \ \forall n \geq N.$$

- Quando existe tal ponto p ele é único.

Sequências convergentes

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente num um espaço métrico M se existe um $p \in M$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(p,\epsilon),\ \forall n \geq N.$$

- Quando existe tal ponto p ele é único.
- Utilizamos as notações

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \ \text{ e } \ x_n \to p.$$

Sequências convergentes

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente num um espaço métrico M se existe um $p \in M$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(p,\epsilon),\ \forall n \geq N.$$

- Quando existe tal ponto p ele é único.
- Utilizamos as notações

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \ \text{ e } \ x_n \to p.$$

- Note que $x_n \to p$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, p) < \epsilon,\ \ \forall n \geq N.$$

Sequências convergentes

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente num um espaço métrico M se existe um $p \in M$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(p,\epsilon), \ \forall n \geq N.$$

- Quando existe tal ponto p ele é único.
- Utilizamos as notações

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \ \text{ e } \ x_n \to p.$$

- Note que $x_n \to p$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n,p) < \epsilon, \ \ \forall n \geq N.$$

- Toda sequência convergente é limitada. (Não vale a recíproca.)

Sequências de Cauchy

Sequências de Cauchy

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico M é de Cauchy se: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Sequências de Cauchy

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico M é de Cauchy se: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Proposição

(a) Toda sequência de Cauchy é limitada.

Sequências de Cauchy

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico M é de Cauchy se: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Proposição

(a) Toda sequência de Cauchy é limitada.

(b) Toda sequência convergente é de Cauchy.

Sequências de Cauchy

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico M é de Cauchy se: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Proposição

(a) Toda sequência de Cauchy é limitada.

(b) Toda sequência convergente é de Cauchy.

IMPORTANTE

Em geral, não vale a recíproca do item (b).

Espaço métrico completo

Espaço métrico completo

Definição

Dizemos que um espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Espaço métrico completo

Definição

Dizemos que um espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Espaço de Banach

Um espaço normado $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ é dito de Banack se for completo com respeito a métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Espaço métrico completo

Definição

Dizemos que um espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Espaço de Banach

Um espaço normado $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ é dito de Banack se for completo com respeito a métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Espaço de Hilbert

Um espaço com produto interno $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é dito de Hilbert se for completo com respeito a métrica

$$d(x, y) = (\langle x - y, x - y\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Exemplos

Exemplos

Dimensão finita e sequências

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são completos.
- ℓ^p é completo, $1 \leq p \leq \infty$.

Exemplos

Dimensão finita e sequências

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são completos.
- ℓ^p é completo, $1 \leq p \leq \infty$.

Funções

O espaço $\mathscr{C}([a,b])$ das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é completo com respeito a métrica

$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Exemplos

Dimensão finita e sequências

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são completos.
- ℓ^p é completo, $1 \leq p \leq \infty$.

Funções

O espaço $\mathscr{C}([a,b])$ das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é completo com respeito a métrica

$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Polinômios

O espaço $\mathscr{P}([a,b])$ dos polinômios $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ **não é completo** com respeito a métrica

$$d(p,q) = \sup_{x \in [a,b]} |p(x) - q(x)|.$$

Exemplos

Métrica dada pela integral

O espaço das funções contínuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ **não é completo** com respeito a métrica

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$$

Exemplos

Métrica dada pela integral

O espaço das funções contínuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ **não é completo** com respeito a métrica

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

Considere a sequência de funções x_m como definida na figura abaixo, em que $a_m = 1/2 + 1/m$.