CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Ponto fixo de Banach

Definição

Uma contração num espaço métrico (M, d) é uma função $f : M \to M$ para a qual existe $0 < \alpha < 1$ satisfazendo

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Ponto fixo de Banach

Definição

Uma contração num espaço métrico (M, d) é uma função $f : M \to M$ para a qual existe $0 < \alpha < 1$ satisfazendo

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Teorema (Ponto fixo de Banach para contrações)

Uma contração f num um espaço métrico completo (M, d) possui um **único** ponto fixo, isto é, existe um **único** $\hat{x} \in M$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Aplicação: Invariância da bola fechada

Teorema

Sejam M um espaço métrico e $f : M \to M$ uma contração com

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

para $0 < \alpha < 1$.
Tome $a \in M$ e tome $r > 0$ tal que

$$d(a, f(a)) \leq r(1 - \alpha)$$

e defina $B = B[a, r]$. Nestas condições, temos:

APLICAÇÃO: INVARIÂNCIA DA BOLA FECHADA

TEOREMA

Sejam M um espaço métrico e $f : M \to M$ uma contração com

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

para $0 < \alpha < 1$.
Tome $a \in M$ e tome $r > 0$ tal que

$$d(a, f(a)) \leq r(1 - \alpha)$$

e defina $B = B[a, r]$. Nestas condições, temos:

(a) $f(B) \subset B$ (isso diz que B é invariante por f).

(b) Se M é completo, então o ponto fixo de f está em B.

Aplicação: Perturbação da identidade

Teorema

Sejam E um espaço de Banach, $U \subset E$ um aberto e $\varphi : U \to E$ uma contração. Então, a aplicação $f : U \to E$ dada por

$$f(x) = x + \varphi(x)$$

é um homeomorfismo sobre um conjunto aberto W de E, isto é, $f : U \to W$ é contínua, bijetiva e sua inversa também é contínua.

- A demonstração fica de exercício.

Aplicação: Existência e unicidade de soluções

Teorema

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ exista e seja contínua em U. Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, y_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

definida num intervalo aberto $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(x_0, xy0) > 0$.