CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Conjuntos compactos

Definição

Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito compacto se toda sequência limitada de pontos em X possui subsequência convergente em X.

Conjuntos compactos

Definição

Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito compacto se toda sequência limitada de pontos em X possui subsequência convergente em X.

Proposição 1

Se X é compacto, então é limitado e fechado.

Conjuntos compactos

Definição

Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito compacto se toda sequência limitada de pontos em X possui subsequência convergente em X.

Proposição 1

Se X é compacto, então é limitado e fechado.

A recíproca!

Em geral não é válida. Por exemplo, basta tomar a base canônica de ℓ^2.

Conjuntos compactos

Definição

Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito compacto se toda sequência limitada de pontos em X possui subsequência convergente em X.

Proposição 1

Se X é compacto, então é limitado e fechado.

A recíproca!

Em geral não é válida. Por exemplo, basta tomar a base canônica de ℓ^2.

Em dimensão finita

Seja E um espaço normado de dimensão finita. Então, $X \subset E$ é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.

Um resultado muito surpreendente

Teorema

A bola $B[0, 1]$ de um espaço normado E é compacta se, e somente se, a dimensão de E é finita.

Um resultado muito surpreendente

Teorema

A bola $B[0, 1]$ de um espaço normado E é compacta se, e somente se, a dimensão de E é finita.

Lema de Riesz

Sejam Y, Z subespaços de um espaço normado E, sendo $Y \subset Z$ um subespaço de dimensão finita. Nestas condições, para cada $\theta \in (0, 1)$, existe $z \in Z$ tal que

$$\|z\| = 1 \text{ e } \|z - y\| \geq \theta, \; \forall y \in Y.$$

Topologia

Definição

Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$ um subconjunto. Uma cobertura **aberta** de X é uma coleção de abertos A_λ, $\lambda \in F$, tal que

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda.$$

Topologia

Definição

Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$ um subconjunto. Uma cobertura **aberta** de X é uma coleção de abertos A_λ, $\lambda \in F$, tal que

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda.$$

Teorema

Um conjunto $X \subset M$ é compacto se, e somente se, toda cobertura por abertos de X possui subcobertura finita, isto é, se

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda, \quad \text{com cada } A_\lambda \text{ aberto, então}$$

existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ tais que

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{\lambda_j}.$$

Algumas observações

- Seja M um espaço métrico compacto. Se $F \subset M$ é fechado, então é compacto.

Algumas observações

- Seja M um espaço métrico compacto. Se $F \subset M$ é fechado, então é compacto.
- Se K_λ é uma família de compactos em um espaço métrico M, então

$$K = \bigcap_{\lambda \in F} K_\lambda$$

é compacto.

ALGUMAS OBSERVAÇÕES

- Seja M um espaço métrico compacto. Se $F \subset M$ é fechado, então é compacto.
- Se K_λ é uma família de compactos em um espaço métrico M, então

$$K = \bigcap_{\lambda \in F} K_\lambda$$

  é compacto.
- Todo espaço métrico compacto é completo.

Algumas observações

- Seja M um espaço métrico compacto. Se $F \subset M$ é fechado, então é compacto.
- Se K_λ é uma família de compactos em um espaço métrico M, então
$$K = \bigcap_{\lambda \in F} K_\lambda$$
é compacto.
- Todo espaço métrico compacto é completo.
- Se $M_1, \ldots, M_n$ são espaços métricos compactos, então
$$M = M_1 \times \ldots \times M_n$$
é compacto.