CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Funções contínuas

Definição

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$|d_N(f(x), f(p))| < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x, p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

Funções contínuas

Definição

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$|d_N(f(x), f(p))| < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x, p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

Observação

Note que f é contínua em p se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$x \in B_M(p, \delta) \Longrightarrow f(x) \in B_N(f(p), \epsilon)$$

ou equivalentemente, $f(B_M(p, \delta)) \subset B_N(f(p), \epsilon)$.

Funções contínuas

Definição

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos é dita contínua num ponto $p \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$|d_N(f(x), f(p))| < \epsilon, \ \forall x \in M \ \text{ tal que } \ d_M(x, p) < \delta.$$

Em particular, f é dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M.

Observação

Note que f é contínua em p se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$x \in B_M(p, \delta) \Longrightarrow f(x) \in B_N(f(p), \epsilon)$$

ou equivalentemente, $f(B_M(p, \delta)) \subset B_N(f(p), \epsilon)$.

Proposição 1

Temos f contínua em p se, e somente se, para todo aberto $Y \subset N$, com $f(p) \in Y$, tivermos que $f^{-1}(Y)$ aberto em M.

Observação

Convém lembrar que

- $f\left(\bigcup_{\lambda\in L} X_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in L} f(X_\lambda)$.
- $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
- $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in L} X_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in L} f^{-1}(X_\lambda)$.
- $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in L} X_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in L} f^{-1}(X_\lambda)$.

Definição

Dois espaços métricos M, N são ditos homeomorfos se existe uma bijeção contínua $f : M \to N$, com inversa também contínua.

Cisão

Definição

Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$ na qual:

- $A \cap B = \emptyset$.
- A, B são abertos.

Cisão

Definição

Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$ na qual:

- $A \cap B = \emptyset$.
- A, B são abertos.

Observação

Note que numa cisão $M = A \cup B$, temos que A e B são simultaneamente abertos e fechados.

Cisão

Definição

Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$ na qual:

- $A \cap B = \emptyset$.
- A, B são abertos.

Observação

Note que numa cisão $M = A \cup B$, temos que A e B são simultaneamente abertos e fechados.

Exemplos

- Se $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$ formam uma cisão de M.
- Se M é discreto, então todo subconjunto A determina uma cisão $M = A \cup (M \setminus A)$.
- Fixando $\alpha \in \mathbb{R}$ um número irracional, temos uma cisão para Q:

$$A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$$

Matrizes invertíveis

O conjunto $Gl(\mathbb{R}^n)$

Identificando $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ao conjunto $\mathbb{R}^{n^2}$ obtemos que a função determinante $det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é contínua, logo o conjunto $Gl(\mathbb{R}^n)$ formado pelas matrizes invertíveis é um conjunto aberto. Em $Gl(\mathbb{R}^n)$ temos a cisão

$$Gl(\mathbb{R}^n) = G_n^+ \cup G_n^-,$$

sendo G_n^+, G_n^- os conjuntos das matrizes de determinantes positivos e negativos, respectivamente.

Conjuntos conexos

Definição

Uma cisão $M = A \cup B$ é dita **trivial** quando tivermos $A = \emptyset$, ou $B = \emptyset$. Em particular, um espaço métrico é dito **conexo** se a úncia cisão possível é justamente a trivial.
Além disso, um subconjunto $X \subset M$ é dito conexo quando é conexo visto como subespaço métrico.

Conjuntos conexos

Definição

Uma cisão $M = A \cup B$ é dita **trivial** quando tivermos $A = \emptyset$, ou $B = \emptyset$. Em particular, um espaço métrico é dito **conexo** se a úncia cisão possível é justamente a trivial.
Além disso, um subconjunto $X \subset M$ é dito conexo quando é conexo visto como subespaço métrico.

Exemplos

- $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Q}$ são desconexos.

Conjuntos conexos

Definição

Uma cisão $M = A \cup B$ é dita **trivial** quando tivermos $A = \emptyset$, ou $B = \emptyset$. Em particular, um espaço métrico é dito **conexo** se a úncia cisão possível é justamente a trivial.
Além disso, um subconjunto $X \subset M$ é dito conexo quando é conexo visto como subespaço métrico.

Exemplos

- $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Q}$ são desconexos.
- Um espaço com um único ponto é conexo.

Conjuntos conexos

Definição

Uma cisão $M = A \cup B$ é dita **trivial** quando tivermos $A = \emptyset$, ou $B = \emptyset$. Em particular, um espaço métrico é dito **conexo** se a úncia cisão possível é justamente a trivial.
Além disso, um subconjunto $X \subset M$ é dito conexo quando é conexo visto como subespaço métrico.

Exemplos

- $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Q}$ são desconexos.
- Um espaço com um único ponto é conexo.
- $Gl(\mathbb{R}^n)$ é desconexo.

Conjuntos conexos

Definição

Uma cisão $M = A \cup B$ é dita **trivial** quando tivermos $A = \emptyset$, ou $B = \emptyset$. Em particular, um espaço métrico é dito **conexo** se a úncia cisão possível é justamente a trivial.
Além disso, um subconjunto $X \subset M$ é dito conexo quando é conexo visto como subespaço métrico.

Exemplos

- $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Q}$ são desconexos.
- Um espaço com um único ponto é conexo.
- $Gl(\mathbb{R}^n)$ é desconexo.
- $\mathbb{R}$ é conexo.

Continuidade X conexidade

Teorema

Seja $f : M \to N$ uma função contínua e sobrejetiva. Se M é conexo, então N é conexo de N.

Continuidade x conexidade

Teorema

Seja $f : M \to N$ uma função contínua e sobrejetiva. Se M é conexo, então N é conexo de N.

Corolário 1

Imagem de conexo por função contínua é conexo.

Continuidade x conexidade

Teorema

Seja $f : M \to N$ uma função contínua e sobrejetiva. Se M é conexo, então N é conexo de N.

Corolário 1

Imagem de conexo por função contínua é conexo.

Corolário 2

Se M é um conexo homeomorfo a N, então N é conexo.

Continuidade X conexidade

Teorema

Seja $f : M \to N$ uma função contínua e sobrejetiva. Se M é conexo, então N é conexo de N.

Corolário 1

Imagem de conexo por função contínua é conexo.

Corolário 2

Se M é um conexo homeomorfo a N, então N é conexo.

Proposição

O fecho de um conexo é conexo.Em particular, se X é conexo e $X \subset Y \subset \overline{X}$, então Y é conexo.

Continuidade x conexidade

Teorema

Seja $f : M \to N$ uma função contínua e sobrejetiva. Se M é conexo, então N é conexo de N.

Corolário 1

Imagem de conexo por função contínua é conexo.

Corolário 2

Se M é um conexo homeomorfo a N, então N é conexo.

Proposição

O fecho de um conexo é conexo.Em particular, se X é conexo e $X \subset Y \subset \overline{X}$, então Y é conexo.

Exemplos

- Todo intervalo da reta é conexo.
- O círculo $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo.

Outros resultados

Proposição

Seja X_λ, $\lambda \in F$, uma família de conjuntos conexos. Se $\bigcap_{\lambda \in F} X_\lambda \neq \emptyset$, então $\bigcup_{\lambda \in F} X_\lambda$ é conexo.

Outros resultados

Proposição

Seja X_λ, $\lambda \in F$, uma família de conjuntos conexos. Se $\bigcap_{\lambda \in F} X_\lambda \neq \emptyset$, então $\bigcup_{\lambda \in F} X_\lambda$ é conexo.

Corolário

Um espaço é conexo se, e somente se, dados dois pontos quaisquer $a, b \in M$, existe um conexo X tal que $a, b \in X$.

Outros resultados

Proposição

Seja X_λ, $\lambda \in F$, uma família de conjuntos conexos. Se $\bigcap_{\lambda \in F} X_\lambda \neq \emptyset$, então $\bigcup_{\lambda \in F} X_\lambda$ é conexo.

Corolário

Um espaço é conexo se, e somente se, dados dois pontos quaisquer $a, b \in M$, existe um conexo X tal que $a, b \in X$.

Exemplos

- Todo espaço normado é conexo.

Outros resultados

Proposição

Seja X_λ, $\lambda \in F$, uma família de conjuntos conexos. Se $\bigcap_{\lambda \in F} X_\lambda \neq \emptyset$, então $\bigcup_{\lambda \in F} X_\lambda$ é conexo.

Corolário

Um espaço é conexo se, e somente se, dados dois pontos quaisquer $a, b \in M$, existe um conexo X tal que $a, b \in X$.

Exemplos

- Todo espaço normado é conexo.

Proposição

O produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ é conexo se, e somente se, cada fator M_j é conexo.