CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Cisão

Definição

Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$ na qual:

- $A \cap B = \emptyset$.
- A, B são abertos.

Observação

Note que numa cisão $M = A \cup B$, temos que A e B são simultaneamente abertos e fechados.

Definição

Uma cisão $M = A \cup B$ é dita **trivial** quando tivermos $A = \emptyset$, ou $B = \emptyset$. Em particular, um espaço métrico é dito **conexo** se a úncia cisão possível é justamente a trivial.
Além disso, um subconjunto $X \subset M$ é dito conexo quando é conexo visto como subespaço métrico.

Outros resultados

Proposição

Seja X_λ, $\lambda \in F$, uma família de conjuntos conexos. Se $\bigcap_{\lambda\in F} X_\lambda \neq \emptyset$, então $\bigcup_{\lambda\in F} X_\lambda$ é conexo.

Outros resultados

Proposição

Seja X_λ, $\lambda \in F$, uma família de conjuntos conexos. Se $\bigcap_{\lambda \in F} X_\lambda \neq \emptyset$, então $\bigcup_{\lambda \in F} X_\lambda$ é conexo.

Corolário

Um espaço é conexo se, e somente se, dados dois pontos quaisquer $a, b \in M$, existe um conexo X tal que $a, b \in X$.

Outros resultados

Proposição

Seja X_λ, $\lambda \in F$, uma família de conjuntos conexos. Se $\bigcap_{\lambda \in F} X_\lambda \neq \emptyset$, então $\bigcup_{\lambda \in F} X_\lambda$ é conexo.

Corolário

Um espaço é conexo se, e somente se, dados dois pontos quaisquer $a, b \in M$, existe um conexo X tal que $a, b \in X$.

Exemplo

- Todo espaço normado é conexo.

Outros resultados

Proposição

O produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ é conexo se, e somente se, cada fator M_j é conexo.

Outros resultados

Proposição

O produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ é conexo se, e somente se, cada fator M_j é conexo.

Corolário

O espaço $\mathbb{R}^n$ é conexo.

Outros resultados

Proposição

O produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ é conexo se, e somente se, cada fator M_j é conexo.

Corolário

O espaço $\mathbb{R}^n$ é conexo.

Exemplos

- O cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo.
- Para $n > 1$, temos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é conexo.

Outros resultados

Proposição

Os únicos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.

Outros resultados

Proposição

Os únicos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.

Corolário

Se M é um espaço métrico conexo e $f : M \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(M)$ é um intervalo.

Outros resultados

Proposição

Os únicos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.

Corolário

Se M é um espaço métrico conexo e $f : M \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(M)$ é um intervalo.

Corolário

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Outros resultados

Proposição

Os únicos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.

Corolário

Se M é um espaço métrico conexo e $f : M \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(M)$ é um intervalo.

Corolário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Aplicação

Todo polinômio real de grau ímpar possuí ao menos uma raíz real.

Caminhos

Definição

Um caminho num espaço métrico é uma função contínua $f : [0,1] \to M$.

CAMINHOS

DEFINIÇÃO

Um caminho num espaço métrico é uma função contínua $f : [0,1] \to M$.

- Os pontos $a = f(0)$ e $b = f(1)$ são ditos extremos do caminho.
- Se $a = b$, então dizemos que f é um caminho fechado.
- Dados dois caminhos f, g, com $f(1) = g(0)$, podemos definir o novo caminho justaposto $f \vee g$ pondo

$$f \vee g(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, 1/2], \\ g(2t-1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Caminhos

Definição

Um caminho num espaço métrico é uma função contínua $f : [0,1] \to M$.

- Os pontos $a = f(0)$ e $b = f(1)$ são ditos extremos do caminho.
- Se $a = b$, então dizemos que f é um caminho fechado.
- Dados dois caminhos f, g, com $f(1) = g(0)$, podemos definir o novo caminho justaposto $f \vee g$ pondo

$$f \vee g(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, 1/2], \\ g(2t-1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Definição

Um espaço métrico é dito conexo por caminhos quando dois pontos quaisquer podem ser ligados por um caminho.

Exemplos

Exemplo 1

Num espaço normado temos o caminho $f : [0, 1] \to E$ dado por

$$f(t) = (1 - t)a + tb$$

Então, todo espaço normado é conexo.

Conexidade X conexidade por caminhos

Teorema

Todo espaço conexo por caminhos é conexo.

Conexidade X conexidade por caminhos

Teorema

Todo espaço conexo por caminhos é conexo.

Conexo, mas não conexo por caminhos

O gráfico da função $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} cos(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é conexo em $\mathbb{R}^2$, mas não é conexo por caminhos.

Outros resultados

Teorema

(a) Funções contínuas preservam conexidade por caminhos.

(b) Uma reunião de conexos por caminho, com interseção não vazia, é conexo por caminhos.

(c) O produto $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ é conexo por caminhos se, e somente se, cada M_j o for.