CMM 242
Espaços Métricos
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Definição

Uma relação de equivalência num conjunto X é uma relação $\sim$ entre seus elementos que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $x \sim x$, para todo $x \in X$.

(b) $x \sim y$ se, e somente se, $y \sim x$, para todo $x, y \in X$.

(c) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Definição

Uma relação de equivalência num conjunto X é uma relação $\sim$ entre seus elementos que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $x \sim x$, para todo $x \in X$.

(b) $x \sim y$ se, e somente se, $y \sim x$, para todo $x, y \in X$.

(c) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

- A classe de equivalência de um elemento $x \in X$ é o conjunto

$$[x] = \{y \in X;\ x \sim y\}.$$

Relação de equivalência

Definição

Uma relação de equivalência num conjunto X é uma relação $\sim$ entre seus elementos que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $x \sim x$, para todo $x \in X$.

(b) $x \sim y$ se, e somente se, $y \sim x$, para todo $x, y \in X$.

(c) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

- A classe de equivalência de um elemento $x \in X$ é o conjunto

$$[x] = \{y \in X;\ x \sim y\}.$$

- Temos $[a] = [b]$ se, e somente se, $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Definição

Uma relação de equivalência num conjunto X é uma relação $\sim$ entre seus elementos que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $x \sim x$, para todo $x \in X$.

(b) $x \sim y$ se, e somente se, $y \sim x$, para todo $x, y \in X$.

(c) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

- A classe de equivalência de um elemento $x \in X$ é o conjunto

$$[x] = \{y \in X;\ x \sim y\}.$$

- Temos $[a] = [b]$ se, e somente se, $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.
- O conjunto das classes de equivalência é dito espaço quociente e denotado por $X/\sim$.

Definição

Uma relação de equivalência num conjunto X é uma relação $\sim$ entre seus elementos que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $x \sim x$, para todo $x \in X$.

(b) $x \sim y$ se, e somente se, $y \sim x$, para todo $x, y \in X$.

(c) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

- A classe de equivalência de um elemento $x \in X$ é o conjunto

$$[x] = \{y \in X;\ x \sim y\}.$$

- Temos $[a] = [b]$ se, e somente se, $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.
- O conjunto das classes de equivalência é dito espaço quociente e denotado por $X/\sim$.
- Fica então bem definida a função $\pi : X \to X/\sim$ dada por $\pi(x) = [x]$.

Exemplo 1

Considere em $\mathbb{R}^2$ a relação de equivalência

$$(x, y) \sim (z, w) \iff x - z \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ e } y - w \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Em particular,

$$[(x, y)] = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2; x - z \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ e } y - w \in 2\pi\mathbb{Z}.\}$$

Exemplo 1

Considere em $\mathbb{R}^2$ a relação de equivalência

$$(x,y) \sim (z,w) \iff x - z \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ e } y - w \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Em particular,

$$[(x,y)] = \{(z,w) \in \mathbb{R}^2; x - z \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ e } y - w \in 2\pi\mathbb{Z}.\}$$

Exemplo 2

Sejam M um espaço métrico e considere $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy em M. Em $\mathcal{S}$ temos a relação de equivalência

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Em particular,

$$[\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}] = \{\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}; \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0\}.$$

- Fixado um ponto $x \in M$ podemos definir a sequência constante $x_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos $a \in [\{a\}_{n\in\mathbb{N}}]$.

DEFINIÇÃO

Sejam $X = (X, d_X)$ e $Y = (Y, d_Y)$. Dois espaços métricos.

(a) Uma isometria entre X e Y é uma função $T : X \to Y$ tal que

$$d_Y(T(a), T(b)) = d_X(a, b), \ \forall a, b \in X.$$

(b) Os espaços X, Y são ditos isométricos se existe uma isometria bijetiva entre eles

DEFINIÇÃO

Sejam $X = (X, d_X)$ e $Y = (Y, d_Y)$. Dois espaços métricos.

(a) Uma isometria entre X e Y é uma função $T : X \to Y$ tal que

$$d_Y(T(a), T(b)) = d_X(a, b), \ \forall a, b \in X.$$

(b) Os espaços X, Y são ditos isométricos se existe uma isometria bijetiva entre eles

OBSERVAÇÃO

- Toda isometria é uma função injetiva.
- Toda isometria é uma função contínua.

TEOREMA

Dado um espaço métrico $M = (M, d_M)$ existe um espaço métrico $N = (N, d_N)$ tal que

(a) N é completo.

(b) Existe $W \subset N$ isométrico a M.

(c) W é denso em N.

(d) N é único a menos de um isomorfismo, isto é, se existe um outro espaço $\widetilde{N}$ satisfazendo as propriedades acima, então N e $\widetilde{N}$ são isométricos.