

CMM 109

Tópicos de Análise III

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



APRESENTAÇÃO DO CURSO

Ementa: Sistemas de equações diferenciais lineares: Autovalores e autovetores e a forma canônica de Jordan; Exponencial de matrizes; Classificação planar; Fluxo: Fluxo de uma equação linear; Atratores lineares. Campos de vetores: Trajetórias e fluxo; Retrato de fase; Estabilidade: Pontos de equilíbrio; Estabilidade de pontos de equilíbrio; Estabilidade assintótica; Estabilidade segundo Liapunov.

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Ementa: Sistemas de equações diferenciais lineares: Autovalores e autovetores e a forma canônica de Jordan; Exponencial de matrizes; Classificação planar; Fluxo: Fluxo de uma equação linear; Atratores lineares. Campos de vetores: Trajetórias e fluxo; Retrato de fase; Estabilidade: Pontos de equilíbrio; Estabilidade de pontos de equilíbrio; Estabilidade assintótica; Estabilidade segundo Liapunov.

Critérios de avaliação: Listas, provas e seminários.

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Ementa: Sistemas de equações diferenciais lineares: Autovalores e autovetores e a forma canônica de Jordan; Exponencial de matrizes; Classificação planar; Fluxo: Fluxo de uma equação linear; Atratores lineares. Campos de vetores: Trajetórias e fluxo; Retrato de fase; Estabilidade: Pontos de equilíbrio; Estabilidade de pontos de equilíbrio; Estabilidade assintótica; Estabilidade segundo Liapunov.

Critérios de avaliação: Listas, provas e seminários.

Sobre o projeto: Cada alun@ escolherá um tópico para apresentação de um seminário. As possibilidades de tópicos serão discutidas posteriormente.

PLANO

Programa	Conteúdo
Parte I	Soluções de sistemas lineares e plano de fase
Parte II	Teoria qualitativa: estabilidade

BIBLIOGRAFIA

- Livro texto:



Doering, C. I., Lopes, A. O., Equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, 2016.

- Outras boas referências:



Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L., Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, 2da ed., 2004.



Sotomayor, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides, IMPA, 1979.



BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2006.



DJAÍRO GUEDES; ALOÍSIO NEVES Equações diferenciais aplicadas Rio de Janeiro, RJ : IMPA, 2002.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

- Nosso interesse neste curso é, em essência estudar as propriedades das soluções do problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$ e $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 .

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

- Nosso interesse neste curso é, em essência estudar as propriedades das soluções do problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$ e $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 .

OS PRINCIPAIS PROBLEMAS:

- Existe solução para o P.V.I. (1)?

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

- Nosso interesse neste curso é, em essência estudar as propriedades das soluções do problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$ e $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 .

OS PRINCIPAIS PROBLEMAS:

- Existe solução para o P.V.I. (1)?
- Se existe, é única? Qual a dependência em relação às condições iniciais?

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

- Nosso interesse neste curso é, em essência estudar as propriedades das soluções do problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$ e $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 .

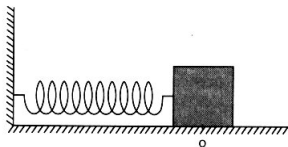
OS PRINCIPAIS PROBLEMAS:

- Existe solução para o P.V.I. (1)?
- Se existe, é única? Qual a dependência em relação às condições iniciais?
- Qual o comportamento dessas soluções? Por exemplo, no caso

$$f(t, x) = A \cdot x(t), \quad A = [a_{i,j}]_{n \times n}.$$

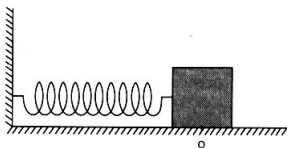
O OSCILADOR HARMÔNICO

- Considere uma mola (massa desprezível) onde está presa uma partícula de massa $m > 0$ em uma de suas extremidades e a outra é fixada numa parede. Suponha que em repouso a partícula permaneça sobre a origem e uma vez que entre em movimento ela se desloca de forma retilínea sobre uma superfície plana e horizontal, como indica a figura abaixo.



O OSCILADOR HARMÔNICO

- Considere uma mola (massa desprezível) onde está presa uma partícula de massa $m > 0$ em uma de suas extremidades e a outra é fixada numa parede. Suponha que em repouso a partícula permaneça sobre a origem e uma vez que entre em movimento ela se desloca de forma retilínea sobre uma superfície plana e horizontal, como indica a figura abaixo.



- Suponha também que a partícula esteja em movimento.
- Nosso propósito é determinar uma função $x = x(t)$ que indique a posição da partícula num instante $t \geq 0$.
- Se tal função existe e possui "boas" propriedades, então sabemos por experiências nas disciplinas de cálculo que as funções $x'(t)$ e $x''(t)$ indicam a velocidade e a aceleração, respectivamente, da partícula em cada instante t .

- Considere que neste sistema existam uma força de atrito F_a entre a superfície e a partícula descrita por $F_a(t) = -\eta x'(t)$, sendo $\eta \geq 0$ o coeficiente de atrito independente do tempo e também uma força externa F_e , dependente do tempo. Suponha que $k > 0$ seja a constante da mola.

- Considere que neste sistema existam uma força de atrito F_a entre a superfície e a partícula descrita por $F_a(t) = -\eta x'(t)$, sendo $\eta \geq 0$ o coeficiente de atrito independente do tempo e também uma força externa F_e , dependente do tempo. Suponha que $k > 0$ seja a constante da mola.
- Nestas condições podemos combinar a **Segunda Lei de Newton** com a **Lei de Hooke** para mostrar que a função $x = x(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \quad (2)$$

sendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad a = \frac{\eta}{m} \geq 0 \text{ e } h(t) = \frac{F_e(t)}{m}.$$

- Considere que neste sistema existam uma força de atrito F_a entre a superfície e a partícula descrita por $F_a(t) = -\eta x'(t)$, sendo $\eta \geq 0$ o coeficiente de atrito independente do tempo e também uma força externa F_e , dependente do tempo. Suponha que $k > 0$ seja a constante da mola.
- Nestas condições podemos combinar a **Segunda Lei de Newton** com a **Lei de Hooke** para mostrar que a função $x = x(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \quad (2)$$

sendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad a = \frac{\eta}{m} \geq 0 \text{ e } h(t) = \frac{F_e(t)}{m}.$$

PROPOSTA:

- Fazer um estudo da equação (2) dividindo nos casos em que existe e não existe atrito entre a partícula e a superfície. (Por simplicidade, vamos supor $h = h(t) \equiv 0$).

AUSÊNCIA DE ATRITO

- Suponha então $\eta = 0$, de modo que a equação (2) se reduz a

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (3)$$

AUSÊNCIA DE ATRITO

- Suponha então $\eta = 0$, de modo que a equação (2) se reduz a

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (3)$$

- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

AUSÊNCIA DE ATRITO

- Suponha então $\eta = 0$, de modo que a equação (2) se reduz a

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (3)$$

- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

TEMOS ENTÃO O P.V.I.

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0, \end{cases}, \quad (4)$$

cujas única solução é

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

- Podemos observar graficamente como se comportam simultaneamente tais funções, no seguinte sentido: Defina $y(t) = x'(t)$, então temos a seguinte equação planar:

$$(x(t), y(t)) = x_0(\cos(\omega t), -\omega \operatorname{sen}(\omega t)).$$

- Podemos observar graficamente como se comportam simultaneamente tais funções, no seguinte sentido: Defina $y(t) = x'(t)$, então temos a seguinte equação planar:

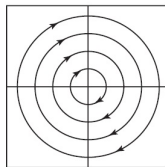
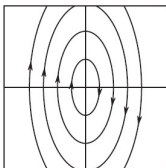
$$(x(t), y(t)) = x_0(\cos(\omega t), -\omega \sin(\omega t)).$$

- Considerando agora a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^2$, temos para cada $t \geq 0$:

$$\|(x(t), y(t))\|^2 = x_0^2[\cos^2(\omega t) + \omega^2 \sin^2(\omega t)].$$

ASSIM:

- Temos uma **trajetória** elíptica, em particular para $\omega = 1$ temos uma circunferência. Observe que independentemente da escolha das condições iniciais podemos obter as mesmas conclusões e então obter o **retrato de fase** determinado pela figura:



NA PRESENÇA DE ATRITO

- Suponha agora $\eta > 0$ e que $0 < a < \omega$. Assim, a equação (2) se reduz a

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (5)$$

NA PRESENÇA DE ATRITO

- Suponha agora $\eta > 0$ e que $0 < a < \omega$. Assim, a equação (2) se reduz a

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (5)$$

- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

NA PRESENÇA DE ATRITO

- Suponha agora $\eta > 0$ e que $0 < a < \omega$. Assim, a equação (2) se reduz a

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (5)$$

- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

TEMOS ENTÃO O P.V.I.

$$\begin{cases} x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0, \end{cases}, \quad (6)$$

cujas únicas soluções são

$$x(t) = e^{-at} x_0 \cos(\omega t).$$

- Definindo então $y(t) = x'(t)$, segue que

$$(x(t), y(t)) = e^{-at} x_0 (\cos(\omega t), -a \cos(\omega t) - \omega \operatorname{sen}(\omega t)).$$

- Definindo então $y(t) = x'(t)$, segue que

$$(x(t), y(t)) = e^{-at} x_0 (\cos(\omega t), -a \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)).$$

- Neste caso,

$$\|(x(t), y(t))\|^2 = e^{-2at} x_0^2 [(1 + a^2) \cos^2(\omega t) + \omega^2 \sin^2(\omega t) + a\omega \sin(\omega t)],$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(x(t), y(t))\| = 0$$

- Definindo então $y(t) = x'(t)$, segue que

$$(x(t), y(t)) = e^{-at} x_0 (\cos(\omega t), -a \cos(\omega t) - \omega \operatorname{sen}(\omega t)).$$

- Neste caso,

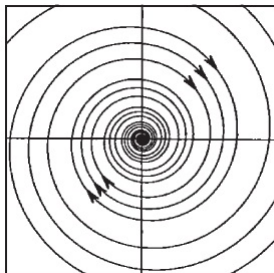
$$\|(x(t), y(t))\|^2 = e^{-2at} x_0^2 [(1 + a^2) \cos^2(\omega t) + \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t) + a\omega \operatorname{sen}(\omega t)],$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(x(t), y(t))\| = 0$$

ASSIM:

- Assim, temos **trajetórias** em espirais que convergem para zero, sendo que o **retrato de fase** é determinado pela figura:



UMA BELA OBSERVAÇÃO...

- Note que a equação

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \quad (7)$$

equivale ao sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$

com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

UMA BELA OBSERVAÇÃO...

- Note que a equação

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \quad (7)$$

equivale ao sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$

com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

- Assim, as discussões sobre a equação diferencial (7) recaem sobre propriedades da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix}.$$

UMA BELA OBSERVAÇÃO...

- Note que a equação

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \quad (7)$$

equivale ao sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$

com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

- Assim, as discussões sobre a equação diferencial (7) recaem sobre propriedades da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix}.$$

- De fato, o relevante será a configuração do autovalores de A .

DE MODO GERAL...

- Veremos que uma E.D.O. de ordem n , com coeficientes constantes, da forma

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t),$$

pode ser estudada pelo sistema

$$X'(t) = AX(t) + b(t),$$

sendo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ e } b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$