CMM 109
Tópicos de Análise III
S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Relembrando

Teorema (1)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 sobre o aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Nestas condições, dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{A}$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

definida num intervalo maximal (aberto) $I_0 = (\alpha, \beta)$ que contém t_0.

OBSERVAÇÃO

Observação

(a) Se $x_i : I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, são duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$, então $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$.

Observação

(a) Se $x_i : I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, são duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$, então $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$.

(b) Dado qualquer compacto $\mathcal{K} \subset U$, são verdadeiras as seguintes afirmações:

- Se $\beta < \infty$, então existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
- Se $-\infty < \alpha$, então existe $\alpha < t^* < t_0$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
- Se $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ e $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução tal que $\{\|x(t)\|, \forall t \in I\}$ é limitado, então $I = \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO

(a) Se $x_i : I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, são duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$, então $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$.

(b) Dado qualquer compacto $\mathcal{K} \subset U$, são verdadeiras as seguintes afirmações:

- Se $\beta < \infty$, então existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
- Se $-\infty < \alpha$, então existe $\alpha < t^* < t_0$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
- Se $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ e $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução tal que $\{\|x(t)\|, \forall t \in I\}$ é limitado, então $I = \mathbb{R}$.

(c) Note que se φ é uma solução de $x' = f(x)$ definida em $I \subset \mathbb{R}$, então dado $t^* \in \mathbb{R}$ temos que $\varphi^*(t) = \varphi(t + t^*)$ também é uma solução, agora definida no intervalo $J^* = I - t^*$.

Observação

(a) Se $x_i : I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, são duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$, então $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$.

(b) Dado qualquer compacto $\mathcal{K} \subset U$, são verdadeiras as seguintes afirmações:

- Se $\beta < \infty$, então existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
- Se $-\infty < \alpha$, então existe $\alpha < t^* < t_0$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
- Se $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ e $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução tal que $\{\|x(t)\|, \forall t \in I\}$ é limitado, então $I = \mathbb{R}$.

(c) Note que se φ é uma solução de $x' = f(x)$ definida em $I \subset \mathbb{R}$, então dado $t^* \in \mathbb{R}$ temos que $\varphi^*(t) = \varphi(t + t^*)$ também é uma solução, agora definida no intervalo $J^* = I - t^*$.

(d) Em particular, podemos sempre considerar (1) com a condição inicial $x(0) = x_0$.

Definição (Fluxo)

Para cada $x \in \mathcal{A}$ considere $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x)$, $x(0) = x$. Ponha

$$\Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t \in I(x),\ x \in \mathcal{A}\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{A}.$$

O fluxo de f é, por definição, a aplicação $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(t,x) = x(t) = x + \int_0^t f(\phi(s,x))ds.$$

Definição (Fluxo)

Para cada $x \in \mathcal{A}$ considere $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x)$, $x(0) = x$. Ponha

$$\Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t \in I(x),\ x \in \mathcal{A}\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{A}.$$

O fluxo de f é, por definição, a aplicação $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(t,x) = x(t) = x + \int_0^t f(\phi(s,x))ds.$$

Teorema (2)

Se $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, então Ω é um aberto e ϕ é de classe C^k.

Definição (Fluxo)

Para cada $x \in \mathcal{A}$ considere $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x)$, $x(0) = x$. Ponha

$$\Omega = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t \in I(x),\ x \in \mathcal{A}\Big\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{A}.$$

O fluxo de f é, por definição, a aplicação $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(t,x) = x(t) = x + \int_0^t f(\phi(s,x))ds.$$

Teorema (2)

Se $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, então Ω é um aberto e ϕ é de classe C^k.

Proposição (1)

Se $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é o fluxo de um campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, então

$$\phi(t, \phi(s,x)) = \phi(t+s, x),$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{A}$ tais que $s, t+s \in I(x)$.

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Proposição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

Teorema (3)

O fluxo $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de um campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é uma aplicação que satisfaz a equação

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = f(\phi(t,x)),\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}.$$

Além disso:

(a) para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\phi_t = \phi(t,\cdot) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é um difeomorfismo de classe C^1 de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}$;

(b) vale a a propriedade de grupo

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s, \forall t, s \in \mathbb{R};$$

(c) para cada $t \in \mathbb{R}$, ϕ_{-t} é a aplicação inversa de ϕ_t;

(d) $\phi_0 = id|_{\mathcal{A}}$.

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T,x) = \phi(t,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T,x) = \phi(t,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t,x) \neq \phi(s,x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T,x) = \phi(t,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t,x) \neq \phi(s,x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t,x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T,x) = \phi(t,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t,x) \neq \phi(s,x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t,x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

Campo laminar

- Considere o campo constante $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$F(y_1, \ldots, y_2) = (1, 0, \ldots, 0)$$

Campo laminar

- Considere o campo constante $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$F(y_1, \dots, y_2) = (1, 0, \dots, 0)$$

- Note que o fluxo ϕ de F é dado por

$$\phi(t, y) = (t + y_1, y_2, \dots, y_n).$$

CAMPO LAMINAR

- Considere o campo constante $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$F(y_1, \ldots, y_2) = (1, 0, \ldots, 0)$$

- Note que o fluxo ϕ de F é dado por

$$\phi(t, y) = (t + y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

- Como fica a representação geométrica de ϕ?

Definição

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto com a **propriedade do fluxo tubular** do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ se existem:

(i) uma vizinhança aberta $\mathscr{U}$ de x_0 em $\mathcal{A}$,

DEFINIÇÃO

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto com a **propriedade do fluxo tubular** do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ se existem:

(i) uma vizinhança aberta $\mathscr{U}$ de x_0 em $\mathcal{A}$,

(ii) um aberto $\mathscr{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$,

Definição

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto com a **propriedade do fluxo tubular** do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ se existem:

(i) uma vizinhança aberta $\mathscr{U}$ de x_0 em $\mathcal{A}$,

(ii) um aberto $\mathscr{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$,

(iii) um $r > 0$ e um difeormorfismo

$$g : \mathscr{U} \to (-r, r) \times \mathscr{W}$$

que conjuga o fluxo ϕ de f em $\mathscr{U}$ com o fluxo ψ do campo laminar F em $\mathscr{W}$, ou seja,

$$g(\phi(t,x)) = \psi(t, g(x)), \ \forall t \in (-r,r), \forall x \in \mathscr{U}.$$

Definição

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto com a **propriedade do fluxo tubular** do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ se existem:

(i) uma vizinhança aberta $\mathscr{U}$ de x_0 em $\mathcal{A}$,

(ii) um aberto $\mathscr{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$,

(iii) um $r > 0$ e um difeormorfismo

$$g : \mathscr{U} \to (-r, r) \times \mathscr{W}$$

que conjuga o fluxo ϕ de f em $\mathscr{U}$ com o fluxo ψ do campo laminar F em $\mathscr{W}$, ou seja,

$$g(\phi(t,x)) = \psi(t, g(x)), \ \forall t \in (-r,r), \forall x \in \mathscr{U}.$$

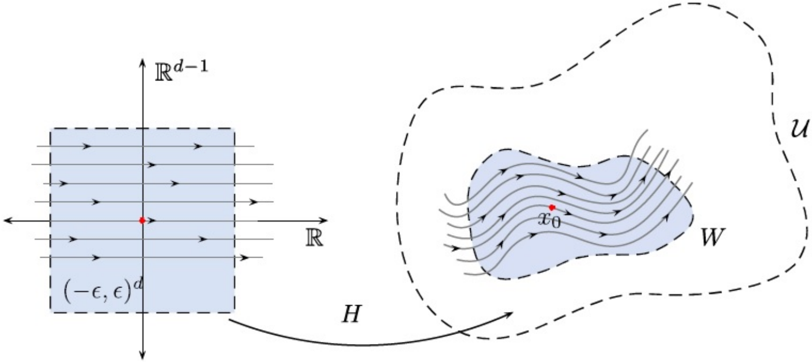
Exemplo

Dados $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $f(x_1,x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2), \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos

$$g(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{x_1}{x_1^0}\right), x_2 \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - x_2^0 \right), \ x_1^0 \neq 0.$$

Teorema do Fluxo Tubular

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto regular, então x_0 tem a propriedade do fluxo tubular.



Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t, x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t, x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Definição

Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f.

- diz-se que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \implies \|\phi(t, x) - x_0\| \leq \epsilon,\ t \geq 0.$$

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t, x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Definição

Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f.

- diz-se que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \Longrightarrow \|\phi(t, x) - x_0\| \leq \epsilon,\ t \geq 0.$$

- diz-se que x_0 é **assintoticamente estável** se é estável e δ pode ser escolhido de modo que para todo $x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_r(x_0)}$ tem-se

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t, x) = x_0.$$

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t, x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Definição

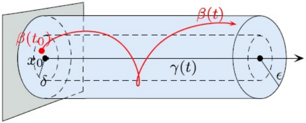
Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f.

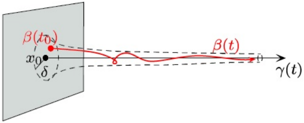
- diz-se que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \Longrightarrow \|\phi(t, x) - x_0\| \le \epsilon,\ t \ge 0.$$

- diz-se que x_0 é **assintoticamente estável** se é estável e δ pode ser escolhido de modo que para todo $x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_r(x_0)}$ tem-se

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t, x) = x_0.$$





EXEMPLOS

- A origem é um **equilíbrio estável** do campo linear

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= (x_2, -x_1) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T
\end{aligned}
$$

Exemplos

- A origem é um **equilíbrio estável** do campo linear

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2, -x_1) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T \end{aligned}$$

- A origem é um **equilíbrio assintoticamente estável** do campo linear

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2, -\omega^2 x_1 - 2a x_2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T, \; 0 < a < \omega. \end{aligned}$$

EXEMPLOS

- A origem é um **equilíbrio estável** do campo linear

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= (x_2,-x_1) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (x_1,x_2)^T \end{aligned}$$

- A origem é um **equilíbrio assintoticamente estável** do campo linear

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= (x_2,-\omega^2 x_1 - 2ax_2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{bmatrix} \cdot (x_1,x_2)^T,\ 0 < a < \omega. \end{aligned}$$

- A origem é um equilíbrio **assintoticamente estável** do campo **não linear**

$$f(x_1,x_2) = (-x_2 + x_1(x_1^2+x_2^2-1), x_1 + x_2(x_1^2+x_2^2-1))$$

Estabilidade de sistemas lineares

Teorema

Seja $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax$ um campo linear qualquer. São equivalentes:

(a) A origem é um poço para A.;

(b) A é um atrator;

(c) O fluxo de A é contrativo;

(d) A origem é uma singularidade assintoticamente estável de A;

Teorema de Liapunov

Notações

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Denotamos por $Df(x_0)$ a derivada de f em x_0.
- Dizemos que x_0 é um **poço** de f se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa. Ou seja, se x_0 é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \quad \text{sendo} \quad A = Df(x_0).$$

Teorema de Liapunov

Notações

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Denotamos por $Df(x_0)$ a derivada de f em x_0.
- Dizemos que x_0 é um **poço** de f se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa. Ou seja, se x_0 é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \ \text{ sendo } \ A = Df(x_0).$$

Teorema (Liapunov)

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se x_0 é um poço de f, então x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para f.

Singularidade instável

Definição

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que x_0 é **instável** se não é estável.

Singularidade instável

Definição

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que x_0 é **instável** se não é estável.

Teorema

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $Df(x_0)$ possui algum autovalor com parte real positiva, então x_0 é uma singularidade instável para f.

Exemplo: pêndulo simples com atrito

- Considere o campo

$$f(\theta, \omega) = (\omega, -g\sin(\theta) - k\omega), \ k > 0,$$

cujas singularidades são os pontos $(\ell\pi, 0)$, com $\ell \in \mathbb{Z}$.