CMM 109
Tópicos de Análise III
S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Proposição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t, x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Definição

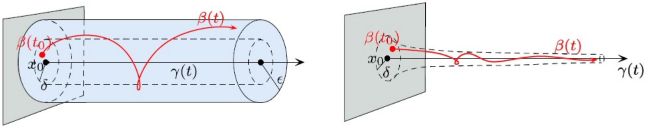
Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f.

- diz-se que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \Longrightarrow \|\phi(t, x) - x_0\| \le \epsilon, \ t \ge 0.$$

- diz-se que x_0 é **assintoticamente estável** se é estável e δ pode ser escolhido de modo que para todo $x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_r(x_0)}$ tem-se

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t, x) = x_0.$$



Teorema de Liapunov

Notações

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Denotamos por $Df(x_0)$ a derivada de f em x_0.
- Dizemos que x_0 é um **poço** de f se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa. Ou seja, se x_0 é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \quad \text{sendo} \quad A = Df(x_0).$$

Teorema (Liapunov)

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se x_0 é um poço de f, então x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para f.

Produto interno adaptado

- Dada uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de R^n podemos definir o produto interno

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j,$$

sendo $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ e $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$. Em particular, temos a norma

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right\}^{1/2}.$$

Lema

Seja $A \in M(n)$ uma matriz real tal que para qualquer autovalor λ tem-se $C_1 < \Re(\lambda) < C_2$. Existe então uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$C_1 \leq \langle Ax, x \rangle_{\mathcal{B}} \leq C_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^n; [x]_{\mathcal{B}} = 1.$$

Derivada do produto interno e Limite superior

Lema

Sejam $[\cdot]$ a norma associada a um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^n$ e $\eta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Então, para cada $t \in I$, valem as igualdades

$$\frac{d}{dt}[\eta(t)]^2 = 2\langle \eta'(t), \eta(t) \rangle \ \text{ e } \ \frac{d}{dt}[\eta(t)] = \frac{\langle \eta'(t), \eta(t) \rangle}{[\eta(t)]}, \ \eta(t) \neq 0.$$

Definição

Dada um função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defini-se, quando existe,

$$\limsup_{x \to 0} g(x) = \inf_{\delta \geq 0} \left\{ \sup_{0 < \|x\| < \delta} g(x) \right\}.$$

Singularidade instável

Definição

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que x_0 é **instável** se não é estável.

Teorema

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $Df(x_0)$ possui algum autovalor com parte real positiva, então x_0 é uma singularidade instável para f.

Exemplo

Os pontos $(\ell\pi, 0)$, com $\ell \in \mathbb{Z}$ ímpar, são singularidades instáveis do campo

$$f(\theta, \omega) = (\omega, -g\sin(\theta) - k\omega), \; k > 0,$$