CMM 109
Tópicos de Análise III
S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

23 de Maio

Aula de hoje: Estabilidade - Funções de Liapunov - Campo gradiente

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Proposição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T,x) = \phi(t,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t,x) \neq \phi(s,x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t,x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t,x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Definição

Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f.

- Dizemos que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \Longrightarrow \|\phi(t,x) - x_0\| \le \epsilon,\ t \ge 0.$$

Topologicamente: dada qualquer vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, tal que $W \subset \mathcal{A} \cap U$ e

$$\phi(t,x) \in U,\ \forall x \in W \ \text{ e } \ \forall t \ge 0.$$

- Diz-se que x_0 é **assintoticamente estável** se é estável e δ pode ser escolhido de modo que para todo $x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_r(x_0)}$ tem-se

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t,x) = x_0.$$

- Dizemos que x_0 é **instável** se não é estável.

Teorema de Liapunov

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Denotamos por $Df(x_0)$ a derivada de f em x_0.
- Dizemos que x_0 é um **poço** de f se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa. Ou seja, se x_0 é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \text{ sendo } A = Df(x_0).$$

Teorema

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) Se x_0 é um poço de f, então x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para f.

(b) Se $Df(x_0)$ possui algum autovalor com parte real positiva, então x_0 é uma singularidade instável para f.

Função de Liapunov

Definição

Sejam $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, e $V : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $x_0 \in U$.

- Para cada $x \in U$, defina

$$\dot{V}(x) \doteq DV(x) \cdot f(x) = \frac{d}{dt} V(\phi(t,x))\Big|_{t=0}$$

Dizemos que V é uma função de Liapunov para x_0 se:

(i) $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0$, para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$;

(ii) $\dot{V}(x) \leq 0$, para todo $x \in U$.

Se, além disso, valer

(iii) $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$,

então diremos que V é uma função de Liapunov estrita.

Teoremas de Liapunov

Teorema 1

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Se existe uma função de Lipaunov para f em x_0, então x_0 é estável.

Teorema 2

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Se existe uma função de Lipaunov **estrita** para f em x_0, então x_0 é **assintoticamente estável**.

Campo gradiente

- Dada uma função $U : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, defina

$$\nabla U(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(x) \right)$$

Campo gradiente

- Dada uma função $U : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, defina

$$\nabla U(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(x) \right)$$

Definição

Associado a uma função $U : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, defini-se o campo gradiente $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, pondo

$$f(x) = -\nabla U(x)$$

Campo gradiente

- Dada uma função $U : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, defina

$$\nabla U(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(x) \right)$$

Definição

Associado a uma função $U : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, defini-se o campo gradiente $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, pondo

$$f(x) = -\nabla U(x)$$

- Note que as singularidades do campo gradiente f são os pontos críticos de U.
- Temos que U é não crescente sobre as curvas soluções de $x' = f(x)$

Campo gradiente

- Dada uma função $U : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, defina

$$\nabla U(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(x) \right)$$

Definição

Associado a uma função $U : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, defini-se o campo gradiente $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, pondo

$$f(x) = -\nabla U(x)$$

- Note que as singularidades do campo gradiente f são os pontos críticos de U.
- Temos que U é não crescente sobre as curvas soluções de $x' = f(x)$

Teorema

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto crítico isolado que é um ponto de mínimo local de $U : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, então x_0 é **assintoticamente estável** do campo gradiente $f(x) = -\nabla U(x)$.

Exemplo

- Considere $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$U(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$$

e seja $f = -\nabla U$ o campo gradiente associado.

Exemplo

- Considere $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$U(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$$

e seja $f = -\nabla U$ o campo gradiente associado.