

CMM 109

Tópicos de Análise III

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



25 DE MAIO

Aula de hoje: Conjuntos Limites

TRAJETÓRIA (ÓRBITA)

DEFINIÇÃO

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x .

PROPOSIÇÃO (2)

Seja $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe $T > 0$ tal que $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica:** $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária:** $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

OBSERVAÇÃO

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

CONJUNTOS ω -LIMITE E α -LIMITE

DEFINIÇÃO

Seja $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d$. Dado um ponto $x \in \mathcal{A}$ definimos os conjuntos

$$\omega(x) = \{p \in \mathcal{A}; \text{ existe } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ tal que } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \phi(t_n, x) \rightarrow p\}$$

e

$$\alpha(x) = \{p \in \mathcal{A}; \text{ existe } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ tal que } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi(t_n, x) \rightarrow p\}$$

chamados de **conjunto ω -limite** e **conjunto α -limite**, respectivamente.

EXEMPLO 1

Se γ é um órbita periódica, então para qualquer $x \in \gamma$, temos $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma$.

EXEMPLO 2

Para o campo linear $f(x, y) = (x, -y)$ temos:

EXEMPLO 1

Se γ é um órbita periódica, então para qualquer $x \in \gamma$, temos $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma$.

EXEMPLO 2

Para o campo linear $f(x, y) = (x, -y)$ temos:

- $\omega(0) = \alpha(0) = \{0\}$;
- se $x \in E_1 \setminus \{0\}$, então $\omega(x) = \emptyset$ e $\alpha(x) = \{0\}$;
- se $x \in E_2 \setminus \{0\}$, então $\omega(x) = \{0\}$ e $\alpha(x) = \emptyset$;
- se $x \in (E_1 \cup E_2)^C$, então $\omega(x) = \alpha(x) = \emptyset$.

EXEMPLO 3

Considere o campo $f(x, y) = (-y + x(x^2 + y^2 - 1), x + y(x^2 + y^2 - 1))$ e seja γ a sua órbita periódica. Temos então:

EXEMPLO 1

Se γ é um órbita periódica, então para qualquer $x \in \gamma$, temos $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma$.

EXEMPLO 2

Para o campo linear $f(x, y) = (x, -y)$ temos:

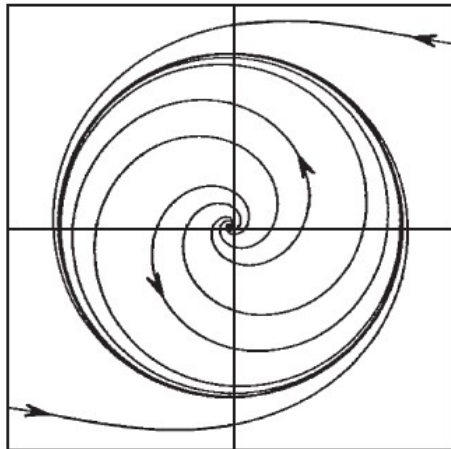
- $\omega(0) = \alpha(0) = \{0\}$;
- se $x \in E_1 \setminus \{0\}$, então $\omega(x) = \emptyset$ e $\alpha(x) = \{0\}$;
- se $x \in E_2 \setminus \{0\}$, então $\omega(x) = \{0\}$ e $\alpha(x) = \emptyset$;
- se $x \in (E_1 \cup E_2)^C$, então $\omega(x) = \alpha(x) = \emptyset$.

EXEMPLO 3

Considere o campo $f(x, y) = (-y + x(x^2 + y^2 - 1), x + y(x^2 + y^2 - 1))$ e seja γ a sua órbita periódica. Temos então:

- se x é um ponto no *interior* de γ , então $\alpha(x) = \{0\}$;
- se x é um ponto no *exterior* de γ , então $\alpha(x) = \emptyset$;
- se x é um ponto em γ , então $\alpha(x) = \gamma$;
- se $x \neq 0$, então $\omega(x) = \gamma$.

O campo $f(x, y) = (-y + x(x^2 + y^2 - 1), x + y(x^2 + y^2 - 1))$.



EXEMPLO 4

Para o campo

$$f(x, y) = (\sin(x)(-0.1 \cos(x) - \cos(y)), \sin(y)(\cos(x) - 0.1 \cos(y)))$$

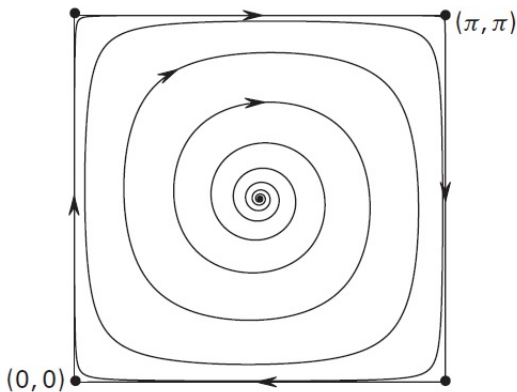
temos o seguinte:

EXEMPLO 4

Para o campo

$$f(x, y) = (\sin(x)(-0.1 \cos(x) - \cos(y)), \sin(y)(\cos(x) - 0.1 \cos(y)))$$

temos o seguinte:



PROPRIEDADES

- Note que o conjunto α -limite de x para o campo f é o conjunto ω -limite de x para o campo $-f$.

PROPRIEDADES

- Note que o conjunto α -limite de x para o campo f é o conjunto ω -limite de x para o campo $-f$.

DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t, p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

PROPRIEDADES

- Note que o conjunto α -limite de x para o campo f é o conjunto ω -limite de x para o campo $-f$.

DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t, p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

PROPOSIÇÃO

- (a) Se y pertence a órbita de x , então $\omega(x) = \omega(y)$.

PROPRIEDADES

- Note que o conjunto α -limite de x para o campo f é o conjunto ω -limite de x para o campo $-f$.

DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t, p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

PROPOSIÇÃO

- Se y pertence a órbita de x , então $\omega(x) = \omega(y)$.
- O conjunto $\omega(x)$ é fechado e invariante.

PROPRIEDADES

- Note que o conjunto α -limite de x para o campo f é o conjunto ω -limite de x para o campo $-f$.

DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t, p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

PROPOSIÇÃO

- Se y pertence a órbita de x , então $\omega(x) = \omega(y)$.
- O conjunto $\omega(x)$ é fechado e invariante.
- Se $F \subseteq \mathcal{A}$ é um conjunto fechado e positivamente invariante, então $\omega(x) \in F$, para todo $x \in F$.

PROPRIEDADES

- Note que o conjunto α -limite de x para o campo f é o conjunto ω -limite de x para o campo $-f$.

DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t, p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

PROPOSIÇÃO

- Se y pertence a órbita de x , então $\omega(x) = \omega(y)$.
- O conjunto $\omega(x)$ é fechado e invariante.
- Se $F \subseteq \mathcal{A}$ é um conjunto fechado e positivamente invariante, então $\omega(x) \in F$, para todo $x \in F$.
- Se $z \in \omega(x)$, então $\omega(z) \subseteq \omega(x)$.

PROPRIEDADES

- Note que o conjunto α -limite de x para o campo f é o conjunto ω -limite de x para o campo $-f$.

DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t, p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

PROPOSIÇÃO

- Se y pertence a órbita de x , então $\omega(x) = \omega(y)$.
- O conjunto $\omega(x)$ é fechado e invariante.
- Se $F \subseteq \mathcal{A}$ é um conjunto fechado e positivamente invariante, então $\omega(x) \in F$, para todo $x \in F$.
- Se $z \in \omega(x)$, então $\omega(z) \subseteq \omega(x)$.
- Se $\omega(x)$ é compacto, então é conexo.

O TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

TEOREMA

Seja $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo planar de classe C^1 cujas soluções de $x' = f(x)$ estão definidas em $\mathbb{R}$. Nestas condições, os únicos conjuntos ω -limite compactos, não vazios e sem singularidades são as órbitas periódicas do campo.