

CMM 109

Tópicos de Análise III

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



DEFINIÇÃO

A exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ é por definição $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

DEFINIÇÃO

A exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ é por definição $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

TEOREMA

A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

converge em $\mathbb{R}$, uniformemente em cada intervalo compacto. Além disso,

- (a) $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, com $e^0 = I$;
- (b) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;
- (c) $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (d) Se $B, C \in M(n)$, então
 - (d1) Se $BC = CA$, então $e^{tB}C = Ce^{tA}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
 - (d2) Se $AB = BC$, então

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

PROPOSIÇÃO

- Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:
 - (a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;
 - (b) se $B = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, então $e^A = Q\text{diag}(e^{\kappa_1}, \dots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;
 - (c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

PROPOSIÇÃO

- Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:
 - (a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;
 - (b) se $B = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, então $e^A = Q\text{diag}(e^{\kappa_1}, \dots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;
 - (c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$
- Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$, então $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_m})$.

PROPOSIÇÃO

- Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:
 - (a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;
 - (b) se $B = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, então $e^A = Q\text{diag}(e^{\kappa_1}, \dots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;
 - (c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$
- Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$, então $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_m})$.
- Se E é uma matriz nilpotente, ou seja, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $E^\ell = 0$, então $e^E = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{E^k}{k!}$.

PROPOSIÇÃO

- Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:
 - (a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;
 - (b) se $B = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, então $e^A = Q\text{diag}(e^{\kappa_1}, \dots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;
 - (c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$
- Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$, então $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_m})$.
- Se E é uma matriz nilpotente, ou seja, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $A^\ell = 0$, então $e^E = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{E^k}{k!}$.
- Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $J(\lambda) = \lambda I + E$, sendo E a matriz nilpotente

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } e^{J(\lambda)} = e^{\lambda I} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

FORMA CANÔNICA DE JORDAN 2×2

- Note então que podemos calcular as exponenciais de matrizes 2×2 através forma canônica de Jordan, poise se λ_1, λ_2 são as duas raízes do polinômio característico de $A \in M(2)$:

1 se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

2 se $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e

(a) $\dim(V_{\lambda_0}) = 2$, então $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I$.

(b) $\dim(V_{\lambda_0}) = 1$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

3 se $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$, então $A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.