

CMM 109

Tópicos de Análise III

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



EXPONENCIAL DE MATRIZES

A série

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

converge uniformemente em cada intervalo compacto. Além disso:

- (a) $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, com $e^0 = I$;
- (b) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;
- (c) $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (d) Se $BC = CA$, então $e^{tB}C = Ce^{tA}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (e) Se $AB = BA$, então

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

PROPOSIÇÃO

• Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:

(a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;

(b) se $B = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, então $e^A = Q\text{diag}(e^{\kappa_1}, \dots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;

(c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

• Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$, então $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_m})$.

• Se E é uma matriz nilpotente, ou seja, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $A^\ell = 0$, então

$$e^E = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{E^k}{k!}.$$

• Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $J(\lambda) = \lambda I + E$, sendo E a matriz nilpotente

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } e^{tJ(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

BLOCOS DE JORDAN

- Para um número real λ definimos por $J_\lambda(\ell) \in M(\ell)$ o **bloco de Jordan real** e tamanho ℓ .
- Para um número complexo $\gamma = a + ib$ definimos por $J_{a,b}(\ell) \in M(2\ell)$ o **bloco de Jordan complexo** e tamanho 2ℓ .
- Geometricamente:

$$J_\lambda(\ell) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_{a,b}(\ell) = \begin{bmatrix} J_{a,b} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & J_{a,b} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & J_{a,b} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I & J_{a,b} \end{bmatrix},$$

sendo

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

FORMA CANÔNICA DE JORDAN

TEOREMA (FORMA CANÔNICA DE JORDAN)

Se $A \in M(n)$, então $A \sim_Q J$ em que

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r) \in M(n),$$

sendo que cada J_i é um bloco de Jordan, real ou complexo. A matriz J é única, a menos da ordem dos blocos na diagonal.

NOTE ENTÃO QUE

$$e^A = Qe^J Q^{-1} = Q \text{diag}(e^{J_1}, e^{J_2}, \dots, e^{J_r}) Q^{-1}$$

e que para $J_{a,b}$ temos

$$e^{J_{a,b}} = \begin{bmatrix} e^a \cos(b) & e^a \sin(b) \\ -e^a \sin(b) & e^a \cos(b) \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO

- Os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2 + i$ e $\lambda_3 = -2 - i$, logo

$$J_1(1) = [1], J_{-2,1}(1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Assim,

$$e^A = Q \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} \cos(1) & e^{-2} \sin(1) \\ 0 & -e^{-2} \sin(1) & e^{-2} \cos(1) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

EXPONENCIAIS DE BLOCOS: BLOCO DE JORDAN REAL

- Para um bloco real $J_\lambda(\ell)$ temos que

$$J_\lambda(\ell) = \lambda I_{\ell \times \ell} + G_1(\ell),$$

com $G_1(\ell)^\ell = 0$.

- Uma vez que $\lambda I_{\ell \times \ell}$ comuta com $G_1(\ell)$, então

$$e^{J_\lambda(\ell)} = e^{\lambda I} e^{G_1(\ell)}$$

$$= e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(\ell-1)!} & \frac{1}{(\ell-2)!} & \frac{1}{(\ell-3)!} & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M(\ell).$$

EXPONENCIAIS DE BLOCOS: BLOCO DE JORDAN COMPLEXO

- Para um bloco real $J_\lambda(\ell)$, escrevamos $J_\lambda(\ell) = J_\lambda^0(\ell) + G_{1,I}(\ell)$, sendo $J_\lambda^0(\ell) = \text{diag}(J_{a,b}, J_{a,b}, \dots, J_{a,b}) \in M(2\ell)$ e

$$G_{c,I}(\ell) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ cl & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & cl & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & cl & 0 \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$

- Uma vez que $G_{1,I}^\ell(\ell) = 0$, então

$$e^{G_{c,I}(\ell)} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ cl & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} I & cl & I & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} I & \frac{c^2}{2!} I & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{c^{\ell-1}}{(\ell-1)!} I & \frac{c^{\ell-2}}{(\ell-2)!} I & \frac{c^{\ell-3}}{(\ell-3)!} I & \dots & cl & I \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$

- Note que $e^{J_{a,b}} = e^a R_b$, sendo

$$R_b = \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}.$$

- Assim,

$$e^{J_{a,b}^{(0)}} = e^a \text{diag}(R_b, R_b, \dots, R_b).$$

- Agora, temos que $J_{a,b}^{(0)}(\ell)$ comuta com $G_{1,l}(\ell)$, donde $e^{J_{a,b}} = e^{J_{a,b}^{(0)}} e^{G_{1,l}(\ell)}$ e então

$$e^{J_{a,b}} = \begin{bmatrix} R_b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_b & R_b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} R_b & R_b & R_b & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} R_b & \frac{1}{2!} R_b & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(\ell-1)!} R_b & \frac{1}{(\ell-2)!} R_b & \frac{1}{(\ell-3)!} R_b & \dots & R_b & R_b \end{bmatrix}$$

EXEMPLO

- Os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 2 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

são $\lambda_{1,2,3} = -1$, $\lambda_4 = -2 + i$ e $\lambda_5 = -2 - i$, logo

$$J_{-1}(3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } J_{-2,1}(1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Assim,

$$e^A = Q \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-1} & e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^{-1}}{2} & e^{-1} & e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2} \cos(1) & e^{-2} \sin(1) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2} \sin(1) & e^{-2} \cos(1) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

SOLUÇÕES DE $x' = Ax$

- Note que a solução do problema

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é então

$$x(t)e^{At}x_0 = Qe^{Jt}Q^{-1}x_0 = Q \operatorname{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_r t}) Q^{-1}x_0$$

- Para um bloco real $J_\lambda(\ell)$ temos $e^{tJ_\lambda(\ell)} = e^{\lambda t} e^{G_t(\ell)}$, sendo

$$e^{G_t(\ell)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} & \frac{t^{\ell-2}}{(\ell-2)!} & \frac{t^{\ell-3}}{(\ell-3)!} & \dots & t & 1 \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$

- Para um bloco complexo teremos $tJ_{a,b} = J_{ta,tb}$, donde

$$e^{tJ_{a,b}} = e^{J_{ta,tb}} = e^{at} R_{tb}$$

- Assim:

$$e^{tJ_{a,b}(\ell)} = e^{at} \begin{bmatrix} R_{bt} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_{bt} & R_{bt} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} R_{bt} & R_{bt} & R_{bt} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3!} R_{bt} & \frac{t^2}{2!} R_{bt} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{t^\ell - 1}{(\ell - 1)!} R_{bt} & \frac{t^{\ell-2}}{(\ell - 2)!} R_{bt} & \frac{t^{\ell-3}}{(\ell - 3)!} R_{bt} & \dots & R_{bt} & R_{bt} \end{bmatrix},$$

sendo

$$R_{bt} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO

- Para o sistema $x' = Ax$, $x(0) = x_0$, com

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 2 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

teremos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = Q e^{tJ} Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} e^{-t} & te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \cos(t) & e^{-2t} \sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2t} \sin(t) & e^{-2t} \cos(t) \end{pmatrix} Q^{-1} x_0 \end{aligned}$$

TEOREMA

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A .

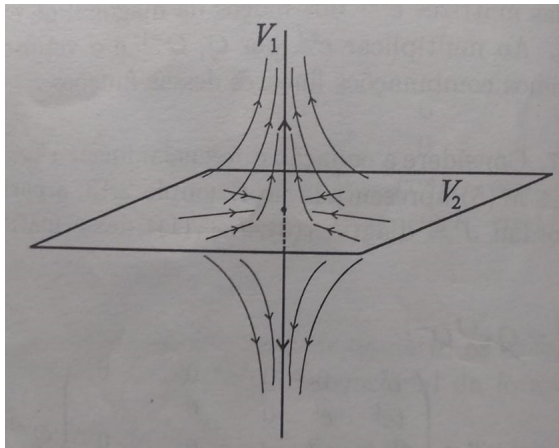
RETRATO DE FASE 3×3

- Considere um sistema $x' = Ax$, com $A \in M(3)$, de modo que a forma de Jordan de A possua dois blocos $J_1 = [1]$ e J_2 de tamanhos 1×1 e 2×2 , respectivamente. Pelo que vimos, temos

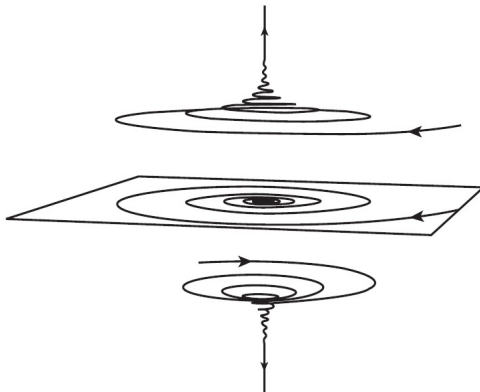
$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} \end{bmatrix}.$$

- Denote por V_1 o auto-espaço gerado pelo autovalor $\lambda_1 = 1$ e por V_2 aqueles gerados pelo(s) autovalor(es) em J_2 .
- Note que em V_1 teremos as soluções indo para $+\infty$, quando $t \rightarrow \infty$.
- Vamos analisar algumas possibilidades de retrato de fase...

CASO 1: AUTOVALORES REAIS E NEGATIVOS EM J_2

CASO 1: AUTOVALORES REAIS E NEGATIVOS EM J_2 

CASO 2: AUTOVALORES IMAGINÁRIOS COM $a < 0$

CASO 2: AUTOVALORES IMAGINÁRIOS COM $a < 0$ 

CASO 3: AUTOVALORES IMAGINÁRIOS PUROS

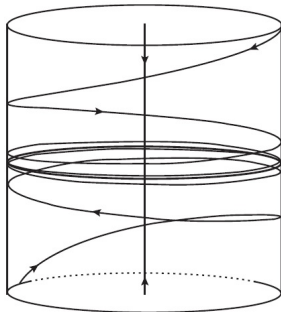
CASO 3: AUTOVALORES IMAGINÁRIOS PUROS

Figura: $\lambda_1 = -1$