CMM 109
Tópicos de Análise III
S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Relembrando

Teorema

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A.

Relembrando

Teorema

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at}\cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at}\sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A.

Corolário

Se todos os autovalores de uma matriz $A \in M(n)$ são tais que

- sendo reais são negativos, ou
- sendo complexos tem parte real negativa,

então qualquer solução de $x' = Ax$ tende a 0, quanto $t \to \infty$.

Relembrando

Teorema

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A.

Corolário

Se todos os autovalores de uma matriz $A \in M(n)$ são tais que

- sendo reais são negativos, ou
- sendo complexos tem parte real negativa,

então qualquer solução de $x' = Ax$ tende a 0, quanto $t \to \infty$.

Vale a recíproca!

- Se A possui um autovalor real positivo, ou imaginário com parte real negativa, então existe uma solução de $x' = Ax$ que não converge para zero.

Exemplo

- Para o sistema $x' = Ax$, $x(0) = x_0$, com

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 2 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

teremos

$$\begin{aligned} x(t) = e^{At}x_0 = Qe^{tJ}Q^{-1} \\ = Q \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{-t} & te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t}\cos(t) & e^{-2t}\sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2t}\sin(t) & e^{-2t}\cos(t) \end{pmatrix} Q^{-1}x_0 \end{aligned}$$

Atratores

Definição

Considere um campo linear $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax$, com $A \in M(n)$.

- Dizemos que a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um **poço** para A se, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\lim_{t \to \infty} e^{tA} x = 0.$$

- Dizemos que A é um campo atrator se todos os autovalores de A tem parte real negativa.

Atratores

Definição

Considere um campo linear $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax$, com $A \in M(n)$.

- Dizemos que a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um **poço** para A se, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale
$$\lim_{t \to \infty} e^{tA} x = 0.$$
- Dizemos que A é um campo atrator se todos os autovalores de A tem parte real negativa.

Proposição (1)

A origem é um poço de A se, e somente se, A é um atrator.

Coeficientes de polinômios característicos

Proposição (2)

Considere o polinômio

$$p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0.$$

COEFICIENTES DE POLINÔMIOS CARACTERÍSTICOS

PROPOSIÇÃO (2)

Considere o polinômio

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

- Se $a_4 = 1$, então as raízes de p tem todas parte real negativa se, e somente se,

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_3a_2a_1 > a_3^2 + a_1^2.$$

- Se $a_4 = 0$ e $a_3 = 1$, então as raízes de p tem todas parte real negativa se, e somente se,

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_2a_1 > a_0.$$

COEFICIENTES DE POLINÔMIOS CARACTERÍSTICOS

PROPOSIÇÃO (2)

Considere o polinômio

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

- Se $a_4 = 1$, então as raízes de p tem todas parte real negativa se, e somente se,

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_3a_2a_1 > a_3^2 + a_1^2.$$

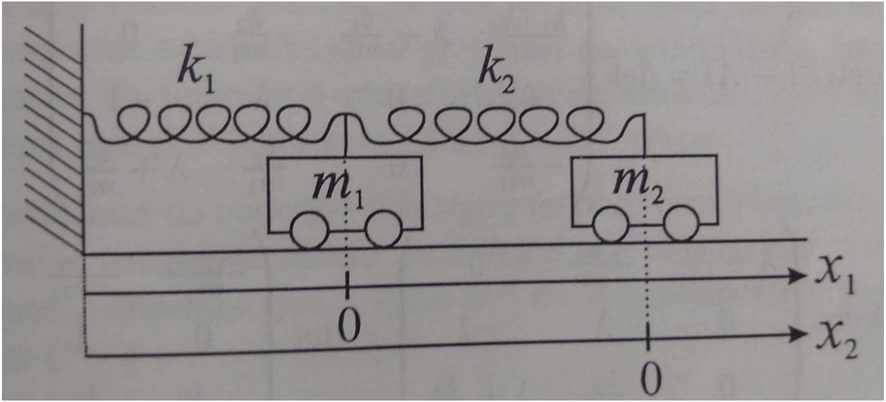
- Se $a_4 = 0$ e $a_3 = 1$, então as raízes de p tem todas parte real negativa se, e somente se,

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_2a_1 > a_0.$$

- Procurar: Routh-Hurwitz

Molas acopladas

- Considere um sistema com duas molas e dois carrinhos (se deslocando horizontalmente) como na figura e assuma que exista atrito.



- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema
$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Escrevendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$ temos o sistema
$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{b_1}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} y(t).$$

- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema
$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Escrevendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$ temos o sistema
$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{b_1}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} y(t).$$

- O polinômio característico da matriz deste sistema é
$$p(x) = x^4 + \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2}\right) x^3 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right) x^2 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\frac{b_2}{m_2} + \frac{b_1 k_2}{m_1 m_2}\right) x + $$

- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1+k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Escrevendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$ temos o sistema

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & -\dfrac{b_1}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} y(t).$$

- O polinômio característico da matriz deste sistema é

$$p(x) = x^4 + \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2}\right)x^3 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right)x^2 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\frac{b_2}{m_2} + \frac{b_1 k_2}{m_1 m_2}\right)x +$$

- Mostra-se que tal polinômio satisfaz as condições na Proposição (2), donde o sistema é atrator.
- O movimento do sistema tende ao repouso.

Fluxo contrativos

Definição

Dizemos que o fluxo $\phi(t, x) = e^{tA}x$ de um campo linear A é contrativo se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\|, \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Fluxo contrativos

Definição

Dizemos que o fluxo $\phi(t,x) = e^{tA}x$ de um campo linear A é contrativo se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\|, \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição(3)

Sejam $A \in M(n)$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Se a parte real de cada autovalor de A é menor do que β, então existe $C \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{t\beta},\ \forall t \geq 0.$$

Fluxo contrativos

Definição

Dizemos que o fluxo $\phi(t,x) = e^{tA}x$ de um campo linear A é contrativo se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\|, \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição(3)

Sejam $A \in M(n)$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Se a parte real de cada autovalor de A é menor do que β, então existe $C \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{t\beta},\ \forall t \geq 0.$$

Teorema

Seja $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax$ um campo linear qualquer. São equivalentes:

(a) A origem é um poço para A.;

(b) A é um atrator;

(c) O fluxo de A é contrativo.

Soluções maximais

Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto U. Então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

Em particular...

Se $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$ é uma matriz real, então dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

definida em $\mathbb{R}$.

Soluções maximais

Lema 1

Sejam $x_i : I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$. Nestas condições,

$$x_1(t) = x_2(t), \ \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Soluções maximais

Lema 1

Sejam $x_i : I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$. Nestas condições,

$$x_1(t) = x_2(t), \ \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Definição

Dizemos que uma solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ de (1) é **máxima** se, dada qualquer outra solução $\widetilde{x} : J \to \mathbb{R}^n$, num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, tivermos que:

(a) $J \subseteq I$;

(b) $x(t) = \widetilde{x}(t)$, para todo $t \in J$.

Soluções maximais

Lema 1

Sejam $x_i : I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$. Nestas condições,

$$x_1(t) = x_2(t), \ \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Definição

Dizemos que uma solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ de (1) é **máxima** se, dada qualquer outra solução $\widetilde{x} : J \to \mathbb{R}^n$, num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, tivermos que:

(a) $J \subseteq I$;

(b) $x(t) = \widetilde{x}(t)$, para todo $t \in J$.

Proposição

Seja f como no T.E.U.. Para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução máxima de (1), necessariamente definida num intervalo aberto.

PARA A FRONTEIRA E AVANTE...

Considere a equação
$$x' = 1 + x^2,$$
cujas soluções são dadas por
$$x(t) = \tan(t - c), \; c \in \mathbb{R}.$$
Note que nenhuma solução poder ser estendida além dos intervalos
$$c - \frac{\pi}{2} \leq t \leq c + \frac{\pi}{2},$$
uma vez que
$$x(t) \to \pm\infty, \; t \to c \pm \frac{\pi}{2}.$$

Para a fronteira e avante...

Teorema 4

Sejam f de classe C^1 nun aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in U$ e $x : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ uma solução máxima de

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dado qualquer compacto $\mathcal{K} \subset U$, são verdadeiras as seguintes afirmações:

(a) Se $\beta < \infty$, então existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que

$$x(t^*) \in U \setminus \mathcal{K}.$$

(b) Se $-\infty < \alpha$, então existe $\alpha < t^* < t_0$ tal que

$$x(t^*) \in U \setminus \mathcal{K}.$$

Para a fronteira e avante...

Teorema 4

Sejam f de classe C^1 nun aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in U$ e $x : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ uma solução máxima de

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dado qualquer compacto $\mathcal{K} \subset U$, são verdadeiras as seguintes afirmações:

(a) Se $\beta < \infty$, então existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que

$$x(t^*) \in U \setminus \mathcal{K}.$$

(b) Se $-\infty < \alpha$, então existe $\alpha < t^* < t_0$ tal que

$$x(t^*) \in U \setminus \mathcal{K}.$$

- Se uma solução x do problema não poder ser estendida a toda semi-reta (ou a toda a reta), então a solução "foge"de qualquer compacto em U.
- Isso quer dizer que quando $t \to \beta$, então $x(t)$ se acumula em ∂U, ou uma sequência $\|x(t_j)\|$ tende a ∞, ou ambos.

FLUXO

Considere $f : U \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 sobre o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in U$, denote por $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x. \end{cases} \tag{2}$$

Fluxo

Considere $f : U \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 sobre o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in U$, denote por $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x. \end{cases} \tag{2}$$

Definição (Fluxo)

O fluxo da equação $x' = f(x)$ é a função $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\phi(t, x) = x + \int_0^t f(\phi(s, x))ds.$$

Em particular,

$$\phi(0, x) = x \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x)) = f \circ \phi(t, x).$$

Exemplo

Para a equação linear $x' = Ax$ temos $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$\phi(t, x) = e^{tA}x.$$

Exemplo

Para a equação linear $x' = Ax$ temos $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$\phi(t, x) = e^{tA}x.$$

Proposição

(a) O conjunto Ω é aberto.

(b) O fluxo $\phi(t, x)$ é de classe C^1 em Ω.

(c) $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$

Proposição

Sejam $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $x, y : I \to \mathbb{R}^n$ soluções das equações

$$x' = f(t,x) \text{ e } y' = g(t,y).$$

Suponha que existam $\epsilon \geq 0$ e $K > 0$ tais que

$$\|f(t,x) - g(t,x)\| \leq \epsilon \text{ e } \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq K\|x-y\|,$$

para todo $(t,x), (t,y) \in U$. Nestas condições,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(u) - y(u)\| \exp(K|t-u|) + \frac{\epsilon}{K}[\exp(K|t-u|) - 1],$$

para todo $t, u \in I$.

Corolário

Seja $M > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x - y\|,$$

Para todo $t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, y_0)$ vale

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, y_0)\| \leq \|x_0 - y_0\| \exp(K|t - t_0|),$$

em que $\varphi(t, t_0, x_0)$ e $\varphi(t, t_0, y_0)$ denotam as soluções dos problemas

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \quad \text{e} \left\{ \begin{array}{l} x' = f(x), \\ x(0) = y_0, \end{array} \right.$$

respectivamente.