

Análise Funcional

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



DEFINIÇÃO

Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$ um conjunto. Dizemos que A é:

- (a) totalmente limitado se dado $\epsilon > 0$, existem $x_1, \dots, x_n$ tais que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \epsilon)$$

- (b) compacto se toda sequência em A possui subsequência que converge em A .
(c) pré-compacto se $\bar{A}$ é compacto.

LEMA

Num espaço métrico completo, conjuntos totalmente limitados são pré-compactos.

DEFINIÇÃO

Uma transformação linear $T : X \rightarrow Y$ entre espaços normados é dita compacta se leva conjuntos limitados em conjuntos pré-compactos, isto é,

$$A \subset X \text{ limitado} \implies \overline{T(A)} \text{ compacto.}$$

Denotaremos por $\mathcal{B}_0(X, Y)$ o espaço das transformações lineares compactas.

DEFINIÇÃO

Uma transformação linear $T : X \rightarrow Y$ entre espaços normados é dita compacta se leva conjuntos limitados em conjuntos pré-compactos, isto é,

$$A \subset X \text{ limitado} \implies \overline{T(A)} \text{ compacto.}$$

Denotaremos por $\mathcal{B}_0(X, Y)$ o espaço das transformações lineares compactas.

LEMA

- (a) $\mathcal{B}_0(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$.
- (b) Se $\dim(X) < \infty$, então $I_d : X \rightarrow X$ não é compacto.

DEFINIÇÃO

Uma transformação linear $T : X \rightarrow Y$ entre espaços normados é dita compacta se leva conjuntos limitados em conjuntos pré-compactos, isto é,

$$A \subset X \text{ limitado} \implies \overline{T(A)} \text{ compacto.}$$

Denotaremos por $\mathcal{B}_0(X, Y)$ o espaço das transformações lineares compactas.

LEMA

- (a) $\mathcal{B}_0(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$.
- (b) Se $\dim(X) < \infty$, então $I_d : X \rightarrow X$ não é compacto.

TEOREMA

Se $T : X \rightarrow Y$ é linear, então é compacta se, e somente se, a imagem de toda sequência limitada possui subsequência convergente.

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert.

- (a) Se T_n é uma sequência em $\mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ que converge para $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.
- (b) Sejam $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$. Se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então as compostas TA e BT são compactas.

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert.

- (a) Se T_n é uma sequência em $\mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ que converge para $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.
- (b) Sejam $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$. Se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então as compostas TA e BT são compactas.

LEMA

Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tem posto finito ($\dim(T(\mathcal{H}_1)) < \infty$), então T é compacto.

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert.

- (a) Se T_n é uma sequência em $\mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ que converge para $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.
- (b) Sejam $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$. Se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então as compostas TA e BT são compactas.

LEMA

Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tem posto finito ($\dim(T(\mathcal{H}_1)) < \infty$), então T é compacto.

DEFINIÇÃO

Denota-se por $\mathcal{B}_{00}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ o espaço das transformações lineares contínuas de posto finito.

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert.

- (a) Se T_n é uma sequência em $\mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ que converge para $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.
- (b) Sejam $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$. Se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então as compostas TA e BT são compactas.

LEMA

Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tem posto finito ($\dim(T(\mathcal{H}_1)) < \infty$), então T é compacto.

DEFINIÇÃO

Denota-se por $\mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ o espaço das transformações lineares contínuas de posto finito.

TEOREMA

Se $\mathcal{H}$ é separável, então

$$\overline{\mathcal{B}_0(\mathcal{H})} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

EXEMPLO

A aplicação $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dada por

$$T(\{x_j\}) = \left\{ \frac{x_j}{j} \right\}$$

é compacta.