# Análise Funcional
# S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

### Definição

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de de $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se existe $0 \neq v \in \mathcal{H}$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

- Note que $\lambda$ é autovalor se, e somente se, $Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.
- Se $\lambda$ é autovalore de $T$, então o autoespaço associado a $\lambda$ é o subespaço

$$V_\lambda = Ker(T - \lambda I).$$

- Vetores não nulos em $V_\lambda$ são chamados de autovetores.
- O conjunto dos autovalores de $T$ será denotado por $\sigma_p(T)$.

- Se $dim(\mathcal{H}) = n$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então todo operador linear possui $n$ autovalores.
- O operador de Volterra

$$Vf(x) = \int_0^x f(s)ds, \ f \in L^2(0,1)$$

não possui autovalores.

### PROPOSIÇÃO

Sejam $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$.

(a) Se $\lambda \in \sigma_p(T)$, então $dim(T_\lambda) < \infty$.

(b) Se

$$\inf_{h \in \mathcal{H},\ \|h\|=1} \{\|(T - \lambda I)h\|\} = 0,$$

então $\lambda \in \sigma_p(T)$.

(c) Se $\lambda \notin \sigma_p(T)$ e $\lambda \notin \sigma_p(T^*)$, então $T_\lambda = T - \lambda I$ é bijetor com inversa

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

### Teorema (Espectral)

Seja $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ um operador autoadjunto.

(a) $\sigma_p(T)$ é contável (finito, ou enumerável).

(b) Se $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ são os autovalores não nulos de $T$ e $P_n$ a projeção de $\mathcal{H}$ sobre $V_{\lambda_n}$, então:

$(b_1)$ $P_m \circ P_n = P_n \circ P_m = 0, \; n \neq m$;

$(b_2)$ $\lambda_j \in \mathbb{R}$;

$(b_3)$ Temos

$$T = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j P_j,$$

com convergência em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.