

Análise Funcional

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



DEFINIÇÃO

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se existe $0 \neq v \in \mathcal{H}$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

- Note que λ é autovalor se, e somente se, $\text{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$.
- Se λ é autovalor de T , então o autoespaço associado a λ é o subespaço

$$V_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda I).$$

- Vetores não nulos em V_λ são chamados de autovetores.
- O conjunto dos autovalores de T será denotado por $\sigma_p(T)$.

PROPOSIÇÃO

Sejam $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$.

(a) Se $\lambda \in \sigma_p(T)$, então $\dim(T_\lambda) < \infty$.

(b) Se

$$\inf_{h \in \mathcal{H}, \|h\|=1} \{\|(T - \lambda I)h\|\} = 0,$$

então $\lambda \in \sigma_p(T)$.

(c) Se $\lambda \notin \sigma_p(T)$ e $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(T^*)$, então $T_\lambda = T - \lambda I$ é bijetor com inversa

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

PROPOSIÇÃO 1

Se A um operador normal e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\ker(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I)^*$ e

$$A(\ker(A - \lambda I)) \subset \ker(A - \lambda I) \text{ e } A(\ker(A - \lambda I)^\perp) \subset \ker(A - \lambda I)^\perp$$

PROPOSIÇÃO 2

Se A é normal e λ, μ são autovalores distintos de A , então

$$\ker(A - \lambda I) \perp \ker(A - \mu I).$$

PROPOSIÇÃO 3

Se $A = A^*$ e $\lambda \in \sigma_p(A)$, então $\lambda \in \mathbb{R}$.

PROPOSIÇÃO 4

Se A é compacto e auto adjunto, então $\|A\|$ ou $-\|A\|$ é auto valor de A .

TEOREMA (ESPECTRAL)

Seja $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ um operador autoadjunto.

- (a) $\sigma_p(T)$ é contável (finito, ou enumerável).
- (b) Se $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ são os autovalores não nulos de T e P_n a projeção de $\mathcal{H}$ sobre V_{λ_n} , então:
 - (b₁) $P_m \circ P_n = P_n \circ P_m = 0$, $n \neq m$;
 - (b₂) $\lambda_j \in \mathbb{R}$;
 - (b₃) Temos

$$T = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j P_j,$$

com convergência em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

COROLÁRIO 1

- (a) $\text{Ker}(T) = [\overline{\text{Ger}\{P_n(\mathcal{H})\}}]^\perp = (\text{Im} T)^\perp$.
- (b) P_n tem posto finito.
- (c) $\|T\| = \sup\{|\lambda_n|, n \in \mathbb{N}\}$ e $\lambda_n \rightarrow 0$.