

Análise Funcional

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



DEFINIÇÃO

Uma norma num espaço vetorial $\mathcal{V}$ é uma função $\mathcal{N} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{V}$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.
 - (N2) $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in \mathcal{V}$;
 - (N3) $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{V}$.
- O par $(\mathcal{N}, \mathcal{V})$ é dito ser um espaço normado. Por vezes, utilizaremos a notação $\mathcal{N}(x) = \|x\|$.
 - Num espaço normado $(\mathcal{N}, \mathcal{V})$ tem-se a métrica (induzida por $\mathcal{N}$):
 $d(x, y) = \|x - y\|$.
 - Um espaço normado completo é dito espaço de Banach.

DEFINIÇÃO

Considere um espaço vetorial $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{K}$.

- Um vetor $\xi \in \mathcal{V}$ é dito uma combinação linear de elementos de $A \subset \mathcal{V}$ se existem $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{V}$ e escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$\xi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j.$$

- Dado $A \subset \mathcal{V}$ defini-se o subespaço

$$\text{Ger}(A) = \{\xi \in \mathcal{V}; \xi \text{ é combinação linear (finita) de elementos de } A\}.$$

- Um subconjunto A de $\mathcal{V}$ é dito linearmente independente, se qualquer coleção finita de elementos de A é linearmente independente.
- Uma base de Hamel** de $\mathcal{V}$ é um subconjunto linearmente independente $\mathcal{E}$ tal que

$$\text{Ger}(\mathcal{E}) = \mathcal{V}.$$

CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

DEFINIÇÃO

Uma ordem parcial " $\leq$ " em um conjunto M , é uma relação binária que satisfaz:

- (i) $a \leq a$ para todo $a \in M$.
 - (ii) se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.
 - (iii) cse $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a \leq c$.
- Um conjunto M é dito parcialmente ordenado se tem uma ordem parcial.
 - Um par de elementos que estejam relacionados pela ordem parcial se dizem comparáveis.
 - Enfatizamos a palavra "ordem parcial", pois nem todo par de elementos de M são comparáveis.

EXEMPLO

Dado um conjunto X , então a inclusão de conjuntos $\subseteq$ define uma ordem parcial em $M = \mathcal{P}(X) = \{A; A \subseteq X\}$ e neste caso, nem todo par de elementos (conjuntos) são comparáveis.

DEFINIÇÃO

- Um subconjunto W de um conjunto parcialmente ordenado M é dito totalmente ordenado (ou uma cadeia), se todo par de elementos de W são comparáveis.
- Uma cota superior de um subconjunto W de um conjunto parcialmente ordenado M é um elemento $u \in M$ tal que

$$x \leq u, \forall x \in W.$$

- Um elemento $m \in M$ é dito um elemento maximal se tem a seguinte propriedade: se $m \leq x$, e $x \in M$, então $x = m$.

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}$ a relação usual $x \leq y$ é uma ordem total. Aqui não existe elemento maximal.
- Em $\mathbb{R}^2$ temos a relação de ordem parcial.

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \doteq y_1 \leq y_2.$$

- Em $M = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ temos relação de ordem parcial $\subseteq$. Note que $\mathbb{R}$ é uma cota superior para qualquer conjunto $W \in M$.
- Considere

$$M = \{A \subseteq \mathbb{R}; A \subseteq \mathbb{Q} \text{ ou } A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

com a relação de inclusão $\subseteq$. Note que M não possui cota superior. Além disso,

$$u = \mathbb{Q} \text{ e } v = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

são maximais.

LEMA DE ZORN

LEMA (DE ZORN)

Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado possui uma cota superior, então M tem um elemento maximal.

TEOREMA

Todo espaço vetorial $\mathcal{V} \neq \{0\}$ tem uma base de Hamel.

TEOREMA

Seja $\mathcal{V} \neq \{0\}$ um espaço vetorial. Então, toda base de Hamel tem a mesma cardinalidade.

HANH-BANACH(REAL)

TEOREMA (DE HANH-BANACH- $\mathbb{R}$)

Sejam $\mathcal{V}$ um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial e p um funcional sublinear sobre $\mathcal{V}$, isto é, $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall x, y \in \mathcal{V}, \forall \alpha \geq 0.$$

Se f é um funcional linear definido sobre um subespaço $Z \subset X$ tal que

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in Z,$$

então f possui uma extensão linear $\tilde{f}$ em $\mathcal{V}$ tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \forall x \in \mathcal{V}.$$

HANH-BANACH(COMPLEXO)

TEOREMA (DE HANH-BANACH- $\mathbb{C}$)

Sejam $\mathcal{V}$ um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), p(\alpha x) = |\alpha|p(x), \forall x, y \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Se f é um funcional linear definido sobre um subespaço $Z \subset X$ tal que

$$|f(x)| \leq p(x), \forall x \in Z,$$

então f possui uma extensão linear $\tilde{f}$ em $\mathcal{V}$ tal que

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \forall x \in \mathcal{V}.$$

EXTENSÃO DE FUNCIONAIS LIMITADOS

TEOREMA

Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado. Todo funcional linear limitado f definido sobre um subespaço $Z \subset \mathcal{N}$ tem uma extensão linear limitada $\tilde{f}$ definida em todo $\mathcal{N}$ tal que

$$\|f\|_{Z^*} = \|\tilde{f}\|_{\mathcal{N}^*}.$$