

Análise Funcional

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



HANH-BANACH(REAL)

TEOREMA (DE HANH-BANACH- $\mathbb{R}$)

Sejam $\mathcal{V}$ um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial e p um funcional sublinear sobre $\mathcal{V}$, isto é, $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall x, y \in \mathcal{V}, \forall \alpha \geq 0.$$

Se f é um funcional linear definido sobre um subespaço $Z \subset X$ tal que

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in Z,$$

então f possui uma extensão linear $\tilde{f}$ em $\mathcal{V}$ tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \forall x \in \mathcal{V}.$$

HANH-BANACH(COMPLEXO)

TEOREMA (DE HANH-BANACH- $\mathbb{C}$)

Sejam $\mathcal{V}$ um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), p(\alpha x) = |\alpha|p(x), \forall x, y \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Se f é um funcional linear definido sobre um subespaço $Z \subset X$ tal que

$$|f(x)| \leq p(x), \forall x \in Z,$$

então f possui uma extensão linear $\tilde{f}$ em $\mathcal{V}$ tal que

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \forall x \in \mathcal{V}.$$

EXTENSÃO DE FUNCIONAIS LIMITADOS

TEOREMA

Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado. Todo funcional linear limitado f definido sobre um subespaço $Z \subset \mathcal{N}$ tem uma extensão linear limitada $\tilde{f}$ definida em todo $\mathcal{N}$ tal que

$$\|f\|_{Z^*} = \|\tilde{f}\|_{\mathcal{N}^*}.$$

COROLÁRIO 1

Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $x_0 \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$. Existe $f \in \mathcal{N}^*$ tal que

$$\|f\|_{\mathcal{N}^*} = 1 \text{ e } f(x_0) = \|x_0\|.$$

COROLÁRIO 2

Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado. Então, para todo $x \in \mathcal{N}$ tem-se

$$\|x\| = \sup_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathcal{N}^*}}.$$

Em particular, $f(x) = 0$ para todo $f \in \mathcal{N}^*$ se, e somente se, $x = 0$.

COROLÁRIO 3

Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $Y \subset \mathcal{N}$ um subespaço fechado e próprio. Para cada $x_0 \in \mathcal{N} \setminus Y$, existe $f \in \mathcal{N}^*$ tal que

$$\|f\|_{\mathcal{N}^*} = 1, \quad f|_Y \equiv 0$$

e $f(x_0) = d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$.

TEOREMA

Se $\mathcal{N}^*$ é separável, então $\mathcal{N}$ também o é.