

# Análise Funcional

## S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva  
Dep. de Matemática - UFPR



### TEOREMA (DA APLICAÇÃO ABERTA)

Sejam  $X, Y$  espaços de Banach e  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Se  $T$  é sobrejetivo, então é aberto.

## GRÁFICO

Dados dois espaços normados  $X, Y$  iremos considerar no espaço  $X \times Y$  a norma

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Note que:

- $(x_n, y_n)$  converge para  $(x, y)$  se, e somente se,  $x_n$  e  $y_n$  convergem para  $x$  e  $y$ , respectivamente.
- $X \times Y$  é Banach se, e somente se, ambos  $X$  e  $Y$  o são.

## GRÁFICO

Dados dois espaços normados  $X, Y$  iremos considerar no espaço  $X \times Y$  a norma

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Note que:

- $(x_n, y_n)$  converge para  $(x, y)$  se, e somente se,  $x_n$  e  $y_n$  convergem para  $x$  e  $y$ , respectivamente.
- $X \times Y$  é Banach se, e somente se, ambos  $X$  e  $Y$  o são.

## DEFINIÇÃO

Seja  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  uma aplicação linear entre espaços normados.

- O gráfico de  $T$  é o conjunto

$$G_T \doteq \{(x, Tx); x \in D(T)\} \subseteq X \times Y.$$

- Dizemos que  $T$  é uma aplicação fechada se  $G_T$  é fechado em  $X \times Y$ .

## EXEMPLOS

### OBSERVAÇÃO

Fechado não implica limitado, bem como limitado não implica fechado.

## EXEMPLOS

### OBSERVAÇÃO

Fechado não implica limitado, bem como limitado não implica fechado.

### FECHADO E NÃO LIMITADO

Considere  $X = C[0, 1]$  com a norma do supremo,  $D(T) = C^1[0, 1]$ . Então, a aplicação  $T : D(T) \rightarrow X$  é fechada.

### LIMITADO E NÃO FECHADO

Considere  $A \subset X$  um subconjunto denso e próprio. Então, a aplicação identidade  $I : A \rightarrow X$  é limitada, mas não fechada.

## EXEMPLOS

### OBSERVAÇÃO

Fechado não implica limitado, bem como limitado não implica fechado.

### FECHADO E NÃO LIMITADO

Considere  $X = C[0, 1]$  com a norma do supremo,  $D(T) = C^1[0, 1]$ . Então, a aplicação  $T : D(T) \rightarrow X$  é fechada.

### LIMITADO E NÃO FECHADO

Considere  $A \subset X$  um subconjunto denso e próprio. Então, a aplicação identidade  $I : A \rightarrow X$  é limitada, mas não fechada.

### PROPOSIÇÃO

Sejam  $X, Y$  espaços normados e  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  um operador limitado.

- (a) Se  $D(T)$  é fechado, então  $T$  é fechado.
- (b) Se  $T$  é fechado e  $Y$  completo, então  $D(T)$  é fechado.

## TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO

### TEOREMA (DO GRÁFICO FECHADO)

Sejam  $X, Y$  espaços de Banach e  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  fechado. Se  $D(T)$  é fechado, então  $T$  é limitado.



## TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO

### TEOREMA (DO GRÁFICO FECHADO)

Sejam  $X, Y$  espaços de Banach e  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  fechado. Se  $D(T)$  é fechado, então  $T$  é limitado.

### PROPOSIÇÃO

Sejam  $X, Y$  espaços normados e  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  linear. Então,  $T$  é fechado se, e somente se, vale a seguinte propriedade:

- se  $x_n \in D(T)$  é tal que  $x_n \rightarrow x$  e  $Tx_n \rightarrow y$ , então  $x \in D(T)$  e  $Tx = y$ .