

Análise Funcional

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



RELEMBRANDO

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado.

- Para cada $x \in \mathcal{H}$, existe um único $y_x \in M$ tal que

$$\inf\{\|x - y\|; y \in M\} = \|x - y_x\|$$

- Fica bem definida a aplicação $P : \mathcal{H} \rightarrow M$ dada por $Px = y_x$.
- Px é o único elemento de M tal que $x - Px \perp M$.

PROPOSIÇÃO

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado.

- (a) P é linear.
- (b) $P^2 = P$.
- (c) $\text{Ker}P = M^\perp$ e $\text{Im}P = M$.
- (d) $\|Px\| \leq \|x\|$.

DESIGUALDADE DE BESSEL

TEOREMA

Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ um conjunto ortonormal num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então,

$$\sum_{\alpha \in J} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Em particular, $\langle x, e_\alpha \rangle \neq 0$ apenas num conjunto enumerável de índices $\alpha \in J$.

DEFINIÇÃO

Um conjunto ortonormal $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito uma base ortonormal se

$$\overline{\text{Ger}(\{e_\alpha\}_{\alpha \in J})} = \mathcal{H}.$$

PROPOSIÇÃO

Todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ não trivial possui é uma base ortonormal.

PROPOSIÇÃO

Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ um conjunto ortonormal num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, são equivalentes:

- (a) $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma base ortonormal.
- (b) se $\xi \in \mathcal{H}$ satisfaz $\xi \perp e_\alpha$, para todo $\alpha \in J$, então $\xi = 0$.

DEFINIÇÃO

Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ um conjunto ortonormal num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Dado $x \in \mathcal{H}$, o conjunto $\{\langle x, e_\alpha \rangle\}_{\alpha \in J}$ é dito coeficientes de Fourier de x . A soma

$$\sum_{\alpha \in J} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$$

é dita série de Fourier de x , com respeito a $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$.

TEOREMA

Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ um conjunto ortonormal num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, são equivalentes:

- (a) $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma base ortonormal.
- (b) a série de Fourier de $x \in \mathcal{H}$, com respeito a $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$, converge para x , ou seja,

$$x = \sum_{\alpha \in J} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha.$$

- (c) Vale a Identidade de Parseval:

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in J} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2.$$

TEOREMA

Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é separável se, e somente se, possui uma base enumerável

TEOREMA

Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert é separável, então existe uma isometria $T : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{K})$