Análise Funcional
S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

PPGM UFPR Programa de Pós-Graduação em Matemática

DMAT - UFPR

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Definição

Um operador linear (transformação linear) entre dois espaços vetoriais $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é uma função $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ tal que

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi), \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \eta, xi \in \mathcal{N}_1.$$

Teorema

Seja $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear entre espaços normados. São equivalentes:

(a) $\sup_{\|\eta\| \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$

(b) Existe $C > 0$ tal que $\|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1$, para todo $\eta \in \mathcal{N}_1$

(c) T é uniformemente contínuo.

(d) T é contínuo.

(e) T é contínuo em 0.

Observação

- Um operador linear contínuo é também chamado de limitado.
- O espaço dos operadores lineares limitados $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ será denotado por $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$
- No caso $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, escreve-se apenas $\mathcal{B}(\mathcal{N})$.
- Note que $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço vetorial munido das operações usuais

Teorema

Para cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ considere o número

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)} \doteq \sup_{\eta\in\mathcal{N}_1,\eta\neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}. \tag{1}$$

Então,

(a) (1) é uma norma em $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$

(b) Valem as igualdades

$$\sup_{\eta\in\mathcal{N}_1,\eta\neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1} = \sup_{\|\eta\|_1=1} \|T\eta\|_2 = \sup_{\|\eta\|_1\leq 1} \|T\eta\|_2 = \inf_{\eta\in\mathcal{N}_1} \{C > 0;\ \|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1\}.$$

(c) Se $\mathcal{N}_2$ é Banach, então o mesmo vale para $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

Definição

Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado, então o espaço de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathbb{K})$ será denotado por $\mathcal{B}^*$. Cada elemento de $\mathcal{B}^*$ é dito um funcional linear contínuo.

Exemplos

- Em $C[0,1]$ temos o operador contínuo
$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds.$$
- Considere $J = [0,1]$ e $\kappa : J \times J \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O operador linear $T : C[0,1] \to C[0,1]$, dado por
$$Tx(t) = \int_0^1 x(s)\kappa(t,s)ds$$
é contínuo.
- Seja $D \subset C[0,1]$ o subespaço do polinômios contínuos $p : [0,1] \to \mathbb{R}$. Então, o operador linear $T : D \to C[0,1]$ dado por $Tp = p'$ não é contínuo.

TEOREMA (REPRESENTAÇÃO DE RIESZ)

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Para cada $f \in \mathcal{H}^*$ existe um único $x_f \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, x_j \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Além disso, $\|x_f\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_{\mathcal{H}^*}$

OBSERVAÇÃO

- Note que o operador $\Psi : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ dado por $\Psi(f) = x_f$ é uma isometria sobrejetiva.
- a norma em $\mathcal{H}^*$ provém do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^*} = \overline{\langle x_f, x_g \rangle_{\mathcal{H}}}.$$

- Todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}^{**}$.