Análise Funcional
S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

DEFINIÇÃO

Um operador linear (transformação linear) entre dois espaços vetoriais $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é uma função $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ tal que

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi), \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \eta, xi \in \mathcal{N}_1.$$

TEOREMA

Seja $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear entre espaços normados. São equivalentes:

(a) $\sup_{\|\eta\| \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$

(b) Existe $C > 0$ tal que $\|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1$, para todo $\eta \in \mathcal{N}_1$

(c) T é uniformemente contínuo.

(d) T é contínuo.

(e) T é contínuo em 0.

Observação

- Um operador linear contínuo é também chamado de limitado.
- O espaço dos operadores lineares limitados $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ será denotado por $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$
- No caso $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, escreve-se apenas $\mathcal{B}(\mathcal{N})$.
- Note que $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço vetorial munido das operações usuais

Teorema

Para cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ considere o número

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)} \doteq \sup_{\eta \in \mathcal{N}_1, \eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}. \tag{1}$$

Então,

(a) (1) é uma norma em $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$

(b) Valem as igualdades

$$\sup_{\eta \in \mathcal{N}_1, \eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1} = \sup_{\|\eta\|_1 = 1} \|T\eta\|_2 = \sup_{\|\eta\|_1 \leq 1} \|T\eta\|_2 = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_1} \{C > 0;\ \|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1\}.$$

(c) Se $\mathcal{N}_2$ é Banach, então o mesmo vale para $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

Definição

Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado, então o espaço de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathbb{K})$ será denotado por $\mathcal{B}^*$. Cada elemento de $\mathcal{B}^*$ é dito um funcional linear contínuo.

TEOREMA (REPRESENTAÇÃO DE RIESZ)

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Para cada $f \in \mathcal{H}^*$ existe um único $x_f \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, x_j \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Além disso, $\|x_f\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_{\mathcal{H}^*}$

OBSERVAÇÃO

- Note que o operador $\Psi : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ dado por $\Psi(f) = x_f$ é uma isometria sobrejetiva.
- a norma em $\mathcal{H}^*$ provém do produto interno
$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^*} = \overline{\langle x_f, x_g \rangle_{\mathcal{H}}}.$$
- Todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}^{**}$.

Definição

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert sobre $\mathbb{K}$.

- Uma forma sesquilinear sobre sobre $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ é uma aplicação $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{K}$ tal que para todo $x, x_1, x_2 \in \mathcal{H}_1$, $y, y_1, y_2 \in \mathcal{H}_2$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$ valem as igualdades
  (a) $h(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + h(x_2, y)$,
  (b) $h(x, \alpha y_1 + y_2) = \overline{\alpha} h(x, y_1) + h(x, y_2)$,
- Dizemos que a forma sesquilinear é limitada se existe uma constante $C > 0$ tal que
  $$|h(x, y)| \leq C\|x\|_1\|y\|_2, \ \forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2.$$
  Neste caso, definimos
  $$\|h\| \doteq \sup_{x,y \neq 0} \frac{|h(x, y)|}{\|x\|_1\|y\|_2},$$
  a qual é chamada de norma de h. Em particular,
  $$|h(x, y)| \leq \|h\|\|x\|_1\|y\|_2$$

REPRESENTAÇÃO DE RIESZ PARA FORMAS SESQUILINEARES

TEOREMA (REPRESENTAÇÃO DE RIESZ)

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear limitada. Então, existe um único operador linear limitado $S_h : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que

$$h(x, y) = \langle S_h(x), y \rangle_{\mathcal{H}_2}, \ \forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

Além disso, $\|h\| = \|S_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$.