

Análise Funcional

S2 - 2024

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



OPERADORES LINEARES LIMITADOS

DEFINIÇÃO

Um operador linear (transformação linear) entre dois espaços vetoriais $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ é uma função $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ tal que

$$T(\alpha\eta + \xi) = \alpha T(\eta) + T(\xi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \eta, \xi \in \mathcal{N}_1.$$

TEOREMA

Seja $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ um operador linear entre espaços normados. São equivalentes:

- (a) $\sup_{\|\eta\| \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$
- (b) Existe $C > 0$ tal que $\|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1$, para todo $\eta \in \mathcal{N}_1$
- (c) T é uniformemente contínuo.
- (d) T é contínuo.
- (e) T é contínuo em 0.

TEOREMA

Para cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ considere o número

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)} \doteq \sup_{\eta \in \mathcal{N}_1, \eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}. \quad (1)$$

Então,

- (a) (1) é uma norma em $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$
- (b) Valem as igualdades

$$\sup_{\eta \in \mathcal{N}_1, \eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1} = \sup_{\|\eta\|_1=1} \|T\eta\|_2 = \sup_{\|\eta\|_1 \leq 1} \|T\eta\|_2 = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_1} \{C > 0; \|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1\}.$$

- (c) Se $\mathcal{N}_2$ é Banach, então o mesmo vale para $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

DEFINIÇÃO

Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado, então o espaço de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathbb{K})$ será denotado por $\mathcal{B}^*$. Cada elemento de $\mathcal{B}^*$ é dito um funcional linear contínuo.

REPRESENTAÇÃO DE RIESZ

TEOREMA (REPRESENTAÇÃO DE RIESZ)

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Para cada $f \in \mathcal{H}^*$ existe um único $x_f \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Além disso, $\|x_f\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_{\mathcal{H}^*}$

OBSERVAÇÃO

- Note que o operador $\Psi : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{H}$ dado por $\Psi(f) = x_f$ é uma isometria sobrejetiva.
- a norma em $\mathcal{H}^*$ provém do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^*} = \overline{\langle x_f, x_g \rangle_{\mathcal{H}}}.$$

- Todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}^{**}$.

REPRESENTAÇÃO DE RIESZ PARA FORMAS SESQUILINEARES

DEFINIÇÃO

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert sobre $\mathbb{K}$.

- Uma forma sesquilinear sobre $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ é uma aplicação $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $x, x_1, x_2 \in \mathcal{H}_1, y, y_1, y_2 \in \mathcal{H}_2$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$ valem as igualdades

(a) $h(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + h(x_2, y),$

(b) $h(x, \alpha y_1 + y_2) = \overline{\alpha} h(x, y_1) + h(x, y_2),$

- Dizemos que a forma sesquilinear é limitada se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|h(x, y)| \leq C \|x\|_1 \|y\|_2, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

Neste caso, definimos

$$\|h\| \doteq \sup_{x, y \neq 0} \frac{|h(x, y)|}{\|x\|_1 \|y\|_2},$$

a qual é chamada de norma de h . Em particular,

$$|h(x, y)| \leq \|h\| \|x\|_1 \|y\|_2$$

REPRESENTAÇÃO DE RIESZ PARA FORMAS SESQUILINEARES

TEOREMA (REPRESENTAÇÃO DE RIESZ)

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear limitada. Então, existe um único operador linear limitado $S_h : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tal que

$$h(x, y) = \langle S_h(x), y \rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

Além disso, $\|h\| = \|S_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$.

OPERADOR AUTO ADJUNTO

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então, existe único $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, T^*y \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2.$$

Além disso, $\|T^*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)} = \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$.

- Dizemos que T^* é o adjunto (de Hilbert) de T .
- Nas condições do teorema, $T^{**} \doteq (T^*)^* = T$.

DEFINIÇÃO

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dizemos que T é:

- Normal se $T^*T = TT^*$.
- Autoadjunto se $T = T^*$.
- Unitário se é bijetivo, com inversa limitada e $T^* = T^{-1}$.

EXEMPLOS

DIMENSÃO FINITA

Dada $A_{n \times n} \in \mathbb{M}(\mathbb{C})$, então o operador adjunto de $x \mapsto Ax$ é

$$x \mapsto \overline{A}^T x.$$

SHIFT

Em ℓ^2 , o adjunto do operador

$$S_d(\{x_j\}) = \{0, x_1, x_2, \dots, \}$$

é o operador

$$S_e(\{y_j\}) = \{y_2, y_3, \dots, \}.$$

ALGUMAS PROPRIEDADES

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então:

- (a) $(\alpha T + S)^* = \bar{\alpha} T^* + S^*$.
- (b) $\|TT^*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)} = \|T^*T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)} = \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}^2$.
- (c) Se $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, então $(ST)^* = T^*S^*$.

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então:

- (a) T é normal se, e somente se, $\|T^*x\|_{\mathcal{H}} = \|Tx\|_{\mathcal{H}}$, para todo $x \in \mathcal{H}$.
- (b) Se $\mathcal{H}$ é um espaço complexo e $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear tal que $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$, então $T \equiv 0$.
- (c) Se $\mathcal{H}$ é um espaço complexo, então T é autoadjunto se, e somente se, $\langle Tx, x \rangle_{\mathcal{H}}$ é real para todo $x \in \mathcal{H}$.
- (d) Se $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de operadores autoadjuntos que converge para T , então T é autoadjunto.