4.5 Exercícios

1. Se x e y sao vetores do espaço com produto interno $\mathbb{X}$ tal que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, podemos concluir que $x \perp y$? Justifique sua resposta.

2. Sejam Y e Z subespaços vetoriais de $\mathbb{X}$. Mostre que $\mathbb{X} = Y \oplus Z$, se e somente se, para cada $x \in X$ existem $y \in Y$ e $z \in Z$ únicos tal que $x = y + z$.

3. Seja A um subconjunto de um espaço com produto interno, mostre que $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

4. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert

   (a) Mostre que Z é um subespaço fechado de $\mathbb{X}$ se, e somente se, $Z = Z^{\perp\perp}$.

   (b) Seja A um subconjunto de $\mathbb{X}$. Mostre que $A^{\perp\perp}$ é o menor subespaço fechado que contem A.

5. Sejam $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ espaços de Hilbert, $M_1 \subseteq \mathbb{X}_1$, $M_2 \subseteq \mathbb{X}_2$ e $T \in B(\mathbb{X}_1; \mathbb{X}_2)$.

   (a) Se $T(M_1) \subseteq M_2$ mostre que $M_1^{\perp} \supseteq T^*(M_2^{\perp})$.

   (b) Se M_1 e M_2 são subespaços, e M_2 é fechado mostre que, se $M_1^{\perp} \supseteq T^*(M_2^{\perp})$, então $T(M_1) \subseteq M_2$.

   (c) Mostre que $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = N(T^*)$, $\mathrm{Im}(T^*)^{\perp} = N(T)$ e $N(T)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}$.

6. Nos seguintes casos, mostre que o subespaço vetorial Z de ℓ^2 é fechado e encontre $Z^{\perp}$.

   (a) $Z = \{x = (x_n) \in \ell^2 : x_n = 0 \text{ quando } n \text{ é par}\}$

   (b) $Z = \mathrm{Ger}\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ onde $e_i = (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$.

7. Seja $\{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$, considere $Z = \overline{\mathrm{Ger}\{e_k : k \in I\}}$. Mostre que o operador projeção ortogonal $P : \mathbb{X} \to Z$ é dado por

$$Px = \sum_{k\in I} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

8. Considere o espaço $C[-1,1]$ com o produto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$. Considere os subespaços de funções pares e ímpares respectivamente

$$A = \{f \in C[-1,1] : f(-x) = f(x)\}, \quad B = \{f \in C[-1,1] : f(-x) = -f(x)\}.$$

   Mostre que $A \perp B$ e que $C[-1,1] = A \oplus B$.

9. Seja Z o conjunto de sequências $x = (x_n)$ que tem no máximo um número finito de termos não nulos. Mostre que existe $x \in \ell^2$ que não pode ser projetado ortogonalmente sobre Z.

10. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto ortonormal. A série $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|$ converge para todo $x \in \mathbb{X}$? Justifique sua resposta.

11. Seja $\{e_k : k \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço com produto interno $\mathbb{X}$, mostre que
$$\sum_{k \in I} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad x, y \in \mathbb{X}.$$

12. Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $x \in \mathbb{X}$. Mostre que
$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|$$

13. Seja $Z \neq \{0\}$, um subespaço completo do espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Considere o operador projeção ortogonal P_Z sobre o subespaço Z. Mostre que
    (a) P_Z é idempotente, isto é, $P_Z^2 = P_Z$.
    (b) $\|P_Z\| = 1$ e $\mathrm{Nu}(P_Z) = Z^{\perp}$.
    (c) Se $\mathbb{X}$ é um espaço de Hilbert então
$$\mathbb{X} = \mathrm{Nu}(P_Z) \oplus \mathrm{Im}(P_Z) = \mathrm{Nu}(P_Z) \oplus \mathrm{Nu}(P_{Z^{\perp}}).$$

14. Seja Z um subespaço do espaço com produto interno $\mathbb{X}$ e $T \in B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$. Dizemos que Z é invariante sob T se $T(Z) \subseteq Z$. Mostre que Z é invariante se, e somente se, $TP_Z = P_Z T P_Z$, sendo P_Z o operador projeção ortogonal sobre Z.

15. Seja M um subconjunto de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$.
    (a) Suponha que M é um subconjunto denso ou um conjunto total. Se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in M$, mostre que $x = y$.
    (b) Suponha que $\mathbb{X}$ é Hilbert. Se a igualdade $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in M$ implica que $x = y$, mostre que M é um conjunto total.

16. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} = \{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes
    (a) $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert.
    (b) para cada $x \in \mathbb{X}$ tem-se que $x = \sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle e_k$.
    (c) para cada $x, y \in \mathbb{X}$ tem-se que $\langle x, y \rangle = \sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}$.

17. Seja $B = \{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal do espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ e $x \in \mathbb{X}$. Mostre que

$$x \in \overline{\text{Ger}(B)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

18. Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno.

    (a) Para cada $y \in \mathbb{X}$ mostre que a aplicação em $\mathbb{X}$, $f_y(x) := \langle x, y \rangle$ é um funcional linear limitado e que $\|f_y\| = \|y\|$

    (b) Considere a aplicação $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ dado por $F(y) = f_y$. Se F é sobrejetiva, mostre que $\mathbb{X}$ é um espaço de Hilbert.

19. Seja $\mathbb{X}$ o completamento do espaço vetorial

$$\mathbb{X} = \left\{ x \in C(\mathbb{R}) : \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^{R} x(t)^2 \, dt \text{ converge} \right\},$$

com o produto interno

$$\langle x, y \rangle = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^{R} x(t) y(t) \, dt.$$

    (a) Mostre que o subconjunto $\{\sin(at) : a > 0\}$ é um conjunto ortogonal de $\mathbb{X}$

    (b) Mostre que $\mathbb{X}$ não é separável.

20. Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços de Hilbert sobre o mesmo corpo de escalares. Se estes espaços tem a mesma dimensão de Hilbert, mostre que são isometricamente isomorfos.

21. Seja R o operador de representação de Hilbert $R : \mathbb{X}' \to \mathbb{X}$. mostre que a inversa $R^{-1} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ é dada por

$$(R^{-1}x)(z) = \langle z, x \rangle \quad \forall z \in \mathbb{X}.$$

22. Mostre que todo espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ é isometricamente isomorfo com seu doble dual $\mathbb{X}'' := (\mathbb{X}')'$.

23. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $g : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ um funcional antilinear limitado, isto é, g satisfaz:

$$g(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} g(x) + \overline{\beta} g(y) \quad \text{e} \quad \|g\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|g(x)|}{\|x\|} < \infty.$$

Mostre que existe um único vetor $y \in \mathbb{X}$ tal que $g(x) = \langle y, x \rangle$ para todo $x \in \mathbb{X}$ e que $\|g\| = \|y\|$.

24. Mostre que o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de um espaço de Hilbert é uma forma sesquilinear. Calcule a norma desta forma sesquilinear.

25. Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial, uma forma Hermitiana em $\mathbb{X}$ é uma forma sesquilinear $h : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ que satisfaz

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Considere h uma forma hermitina não negativa, isto é, $h(x, x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$

(a) Mostre que h satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|h(x, y)|^2 \leq h(x, x)h(y, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$$

(b) Mostre que $p(x) = \sqrt{h(x, x)}$ define uma seminorma em $\mathbb{X}$.

26. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Mostre que a imagem de T é um espaço de dimensão finita se, e somente se, T pode ser representado da forma

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle y_i, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

com $z_i, y_i \in \mathbb{X}$, $i = 1, \ldots, n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

27. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado bijetivo com inverso limitado. Mostre que T^* é bijetivo e que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

28. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e (T_n) uma sequência em $B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$. Se $T_n \to T$ em $B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$, mostre que $T_n^* \to T^*$ em $B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$.

29. Considere os operadores lineares limitados $T, L : \ell^2 \to \ell^2$ cujas regras de correspondência para $x = (x_k)$ são dadas por

$$Tx = (x_2, x_4, x_6, \ldots), \quad Lx = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \ldots).$$

Encontre a regra de correspondência dos adjuntos T^* e L^*.

30. Considere o espaço vetorial $C[0, 1]$ com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt.$$

Para o operador linear limitado $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dado por $T(f)(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\, ds$, encontre um operador linear limitado $L : C[0, 1] \to C[0, 1]$ tal que

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle, \quad \forall f, g \in C[0, 1].$$

31. Se T e S são operadores normais tal que $TS^* = S^*T$ e $ST^* = T^*S$, mostre que $T+S$ e TS são normais.

32. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado. Se T é normal, mostre que $\|T^2\| = \|T\|^2$.

33. Seja $T_n : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma sequência de operadores lineares limitados normais no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ tal que $T_n \to T$. Mostre que T é uma operador linear normal.

34. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $T, S : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ operadores lineares limitados autoadjuntos, mostre que ST é autoadjunto se, e somente se, $ST = TS$.

35. Seja Z um subespaço fechado do espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Mostre que o operador projeção ortogonal P_Z é autoadjunto.

36. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ complexo.

    (a) Mostre que existem operadores autoadjuntos T_1, T_2 únicos tal que $T = T_1 + iT_2$.

    (b) Mostre que T é normal se, e somente se, $T_1T_2 = T_2T_1$, onde T_1,T_2 são os operadores do item anterior.

37. Considere $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $T(x, y) = (x + iy, x - iy)$. Mostre que $T^*T = TT^* = 2I$ e calcule os operadores T_1, T_2 autoadjuntos tal que $T = T_1 + iT_2$.

38. Seja $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Estabeleça condições sobre as entradas da matriz para que A seja um operador normal. Se A é normal porém não é autoadjunto, mostre que existem $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_2 \neq 0$ tal que $A = \beta_1 I + \beta_2 B$, onde

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

39. Mostre que em todo espaço vetorial sempre é possível definir um produto interno.

40. Mostre o item 3 do teorema 4.2.2 combinando o item 1 com o teorema 4.1.7.

41. Sejam U, V operadores unitários no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Mostre que

    (a) Se $\mathbb{X} \neq \{0\}$ então $\|U\| = 1$.

    (b) U^{-1} é unitário.

    (c) UV é unitário.

42. Seja $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Mostre que M é uma matriz unitária se e somente se, suas colunas formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{C}^n$.

43. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma isometria linear no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Se T não é unitário mostre que $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço fechado próprio de $\mathbb{X}$.

44. Mostre que toda isometria linear em espaços com produto interno de dimensão finita é unitário.

45. Seja U um operador unitário no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$.

    (a) Se $E \subset \mathbb{X}$, mostre que $U(E^{\perp}) = U(E)^{\perp}$.

    (b) Mostre que U é autoadjunto se, e somente se, $U^2 = I$.

46. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert. Mostre que um subespaço Z é denso em $\mathbb{X}$ se, e somente se, $Z^{\perp} = \{0\}$.