MATE7007- Análise Funcional

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3

Exercício 1 *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é autoadjunto, então*

$$\|A\| = \sup_{\|h\|=1} |\langle Ah, h\rangle|.$$

Exercício 2 *Mostre que se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $\{e_n\}$ é ortonormal, então $\|Te_n\| \to 0$.*

Exercício 3 *Se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $T^* \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.*

Exercício 4 *Se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $\overline{Im(T)}$ é separável. Se $\{e_n\}$ é uma base de $\overline{Im(T)}$ e P_n são as projeções sobre $\overline{Ger\{e_1, \ldots, e_n\}}$, então*

$$\|P_nT - T\| \to 0.$$

Exercício 5 *Sejam*

- *$\mathcal{H}$ espaço de Hilbert separável com uma base $\{e_n\}$.*
- *$\{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$, com $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| < \infty$.*

Definindo $Ae_n \doteq \alpha_n e_n$, mostre que A se estende a um operador $A \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ com $\|A\| = M$. Verifique que A ´se compacto se, e somente se, $\alpha_n \to 0$. Verifique ainda que $\sigma_p(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

Exercício 6 *Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então $Ker(T) = (ImT^*)^\perp$.*