5.7 Exercícios

1. No conjunto $M = C[0,1]$ considere a relação $f \leq g$ a qual significa que $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Esta relação é uma ordem parcial? M é totalmente ordenado? Subconjuntos de M totalmente ordenados tem uma cota superior? M tem um elemento maximal?

2. Mostre o teorema 3.1.1.

3. Mostre o teorema 4.2.2.

4. Seja p é um funcional sublinear definido no espaço vetorial $\mathbb{X}$.

   (a) Mostre que $p(0) = 0$ e que $p(-x) \geq -p(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

   (b) Se p for contínuo em $x = 0$, mostre que p é contínuo em qualquer $x \in \mathbb{X}$.

   (c) Seja $r > 0$, mostre que o conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : p(x) \leq r\}$ é convexo.

   (d) Mostre que $q(x) = \max\limits_{|\alpha|=1} p(\alpha x)$ define uma seminorma em $\mathbb{X}$.

5. Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função subaditiva definida no espaço normado $\mathbb{X}$, isto é, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$. Se f é não negativa fora de uma bola $\{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq r\}$, mostre que é não negativa para todo $x \in \mathbb{X}$.

6. Seja p é um funcional sublinear definido no espaço vetorial real $\mathbb{X}$.

   (a) Considere o subespaço $Z = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}$, onde $x_0 \in \mathbb{X}$, defina $f : Z \to \mathbb{R}$ dada por $f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$. Mostre que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Z$.

   (b) Mostre que existe um funcional linear $\tilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ tal que $-p(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

7. Se $\mathbb{X}$ é um espaço normado. Mostre que

   (a) Se $\mathbb{X} \neq \{0\}$, então $\mathbb{X}' \neq \{0\}$.

   (b) Para cada $x_0 \in \mathbb{X}$, $x_0 \neq 0$ e $\beta > 0$, existe $f \in \mathbb{X}'$ tal que $f(x_0) = \beta\|x_0\|$ e $\|f\| = \beta$.

   (c) $x = y$ se e somente se $f(x) = f(y)$ para todo $f \in \mathbb{X}'$.

8. Mostre que a função $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = \limsup_{k\to\infty} x_k, \quad x = (x_k) \in \ell^\infty,$$

   é um funcional sublinear

9. Considere o espaço $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|(x,y)\| = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$. No subespaço $Z = \{(t, mt) : t \in \mathbb{R}\}$ considere o funcional linear $f : Z \to \mathbb{R}$ dado por $f(t, mt) = t$.

(a) Se $1 \leq p < \infty$. Encontre a única extensão linear $\tilde{f}$ de f, definida em todo $\mathbb{R}^2$ tal que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

(b) Para o caso $p = \infty$ e $|m| = 1$, encontre duas extensões lineares distintas que preservem a norma de f. Consequentemente encontre infinitas extensões lineares distintas que preservem a norma de f.

10. Seja x_0 um ponto da esfera $S_r = \{x : \|x\| = r\}$ no espaço normado real $\mathbb{X}$. Mostre que existe um hiperplano $H = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = c\}$ com $f \in \mathbb{X}'$, que contem x_0 e mantem S_r em um dos seus lados, isto é, ou $f(x) \leq c$ para todo $x \in S_r$ ou $f(x) \geq c$ para todo $x \in S_r$.

11. Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado e Z um subespaço de $\mathbb{X}$, se $f \in \mathbb{X}'$ temos que $f|_Z \in Z'$. Usando esta associação podemos dizer que $\mathbb{X}' \subseteq Z'$, assim temos que

$$Z \subseteq \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{X}' \subseteq Z' \quad \Rightarrow \quad Z'' \subseteq \mathbb{X}''.$$

Mostre que, se $\mathbb{X}$ é reflexivo e Z é fechado, então Z é reflexivo. Use este resultado para mostrar que ℓ^∞ não é reflexivo.

12. Mostre que, se $\mathbb{X}$ é reflexivo, então $\mathbb{X}'$ é reflexivo. Use este resultado para mostrar que ℓ^1 não é reflexivo.

13. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach. Mostre que $\mathbb{X}$ é reflexivo se, e somente se, $\mathbb{X}'$ é reflexivo.

14. Seja Z um subespaço fechado do espaço normado $\mathbb{X}$ e $x_0 \in \mathbb{X} \setminus Z$. Mostre que existe $f \in \mathbb{X}'$ tal que

$$\|f\| = \frac{1}{d(x_0, Z)}, \quad f\big|_Z \equiv 0, \quad f(x_0) = 1.$$

15. Seja M um subconjunto do espaço normado $\mathbb{X}$. Mostre que

(a) $x_0 \in \overline{\text{Ger}(M)}$ se, e somente se, $f(x_0) = 0$ para todo $f \in \mathbb{X}'$ tal que $f\big|_M \equiv 0$.

(b) Mostre que M é total se, e somente se, para todo $f \in \mathbb{X}'$ tal que $f\big|_M \equiv 0$ tem-se que $f \equiv 0$.

16. Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ um conjunto linearmente independente no espaço normado $\mathbb{X}$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ uma coleção de escalares. Mostre que existe $f \in \mathbb{X}'$ tal que $f(x_k) = c_k$ para todo $k = 1, \ldots, m$.

17. Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados isometricamente isomorfos. Mostre que, se $\mathbb{X}$ é reflexivo então $\mathbb{Y}$ é reflexivo.

18. Seja Z um subespaço do espaço normado $\mathbb{X}$ e $i : Z \to \mathbb{X}$ a inclusão canônica. Mostre que o operador adjunto $i' : \mathbb{X}' \to Z'$ e dado for

$$i'(f) = f\big|_Z \text{ para todo } f \in \mathbb{X}'.$$

19. Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado e $M \subseteq \mathbb{X}$, $N \subseteq \mathbb{X}'$, considere os *conjuntos anuladores*:

$$M^a = \{f \in \mathbb{X}' : f(x) = 0, \quad \forall x \in M\}, \quad {}^a N = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = 0, \quad \forall f \in N\}.$$

   (a) Mostre que $\left(\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right)^a = M^a$ e ${}^a\left(\overline{\mathrm{Ger}(N)}\right) = {}^a N$.

   (b) Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T \in B(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. Mostre que $\mathrm{Im}(T)^a = \mathrm{Nu}(T')$ e $\mathrm{Im}(T) \subseteq {}^a\mathrm{Nu}(T')$.

20. Seja $\{T_\lambda \in B(\mathbb{X}; \mathbb{Y}) : \lambda \in \Lambda\}$ como no Teorema de Banach-Steinhaus. Mostre que $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \|T_\lambda x\| = 0$ uniformemente para todo $\lambda \in \Lambda$.

21. [Ressonância] Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach, $\mathbb{Y}$ um espaço normado e (T_n) uma sequência em $B(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. Se $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| = \infty$, mostre que existe $x_0 \in \mathbb{X}$ com $\|x_0\| = 1$ tal que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x_0\| = \infty$.

22. Mostre que no teorema 5.4.2, o completamento de $\mathbb{X}$ é essencial (isto é, não pode ser retirado). Dica: Encontre uma sequência (f_n) apropriada em $\mathbb{X}'$, onde $\mathbb{X}$ é o subespaço de ℓ^∞ cujos elementos são as sequências que no máximo tem um número finito de termos não nulos.

23. Se (x_n) é uma sequência num espaço normado $\mathbb{X}$. Se para cada $f \in \mathbb{X}'$ a sequência $(f(x_n))$ é limitada, prove que (x_n) é limitada.

24. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Banach e (T_n) uma sequência em $B(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

   (a) $(\|T_n\|)$ é limitado.

   (b) $(\|T_n x\|)$ é limitado para cada $x \in \mathbb{X}$.

   (c) $(\|g(T_n x)\|)$ é limitado para cada $(x, g) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}'$.

   (d) $(\|g \circ T_n\|)$ é limitado para cada $g \in \mathbb{Y}'$.

25. Se $y = (y_n)$ é uma sequência de números reais tal que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge para todo $x = (x_n) \in \ell_0^\infty$, mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$.

26. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado. Mostre que T é fracamente contínuo, isto é, se $x_n \rightharpoonup x$ então $Tx_n \rightharpoonup Tx$.

27. Seja (x_n) uma sequência que converge fraco para x num espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Se $\|x_n\| \to \|x\|$ mostre que (x_n) converge forte para x.

28. Um subconjunto U do espaço normado $\mathbb{X}$ é dito *aberto fraco sequencial* se tem a seguinte propriedade: Se $x \in U$ e (x_n) é uma sequencia em $\mathbb{X}$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ então existe n_0 tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que todo subconjunto aberto fraco sequencial é um conjunto aberto.

29. Mostre que a sequência (e_n) em ℓ^1, onde $e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$, não converge fracamente. Que pode afirmar, sobre a validade do corolário 5.5.4 quando $p = 1$?

30. Mostre a seguinte versão do teorema da limitação uniforme: Considere $\mathbb{X}$ é um espaço de Banach e $\mathbb{Y}$ é um espaço normado. Se $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família em $B(\mathbb{X};\mathbb{Y})$ tal que $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} |g(T_\lambda x)| < \infty$ para todo $x \in \mathbb{X}$ e $g \in \mathbb{Y}'$, então $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| < \infty$. Este resultado generaliza a versão anterior?

31. Seja $\mathbb{X}$ m espaço de Banach considere (T_n), T, (S_n) e S elementos de $B(\mathbb{X};\mathbb{X})$. Mostre que

    (a) Se $T_n \to T$ forte e $S_n \to S$ fraco então $S_nT_n \to ST$ fraco.

    (b) Se $T_n \to T$ fraco e $S_n \to S$ forte então $S_nT_n \to ST$ fraco.

32. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados. Se $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é um operador linear que leva sequências fortemente convergentes para 0 em sequências fracamente convergentes para 0, mostre que T é contínuo.

33. Uma sequência (x_n) no espaço normado $\mathbb{X}$ se diz fracamente limitada se $(f(x_n))$ for limitada para cada $f \in \mathbb{X}'$. Mostre que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, é fracamente limitada.

34. Seja (x_n) uma sequência no espaço normado $\mathbb{X}$ e D um subconjunto denso em $\mathbb{X}'$. Mostre que $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, (x_n) é limitada e $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in D$.

35. Se $\phi_n \rightharpoonup \phi$ em $C[a,b]$, mostre que $\phi_n(t) \to \phi(t)$ para cada $t \in [a,b]$.

36. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Considere a sequência (f_n) em $(\ell^p)'$ definida por $f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_n$.

    (a) Se $p < \infty$, mostre que (f_n) e fraca* convergente, porém não converge forte.

    (b) Se $p = \infty$, mostre que (f_n) é limitada porém não possui subsequencia fraca* convergente.

37. Considere (f_n) uma sequencia no espaço dual $\mathbb{X}'$. Mostre que

    (a) Se $f_n \rightharpoonup f$ então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(b) Se $\mathbb{X}$ é reflexivo e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ então $f_n \rightharpoonup f$.

38. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços métricos e $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função bijetiva. Mostre que h é uma aplicação aberta se, e somente se, h^{-1} é contínua.

39. Considere $\mathbb{X}$ o subespaço de ℓ^∞ cujos elementos são as sequências que tem no máximo um numero finito de entradas não nulas. Mostre que o operador linear $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots),$$

é uma aplicação aberta. T^{-1} é uma aplicação aberta?

40. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado onde $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ são espaços de Banach. Se T é bijetivo, mostre que existem constantes positivas $c_1,\ c_2$ tal que

$$c_1\|x\| \leq \|Tx\| \leq c_2\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

41. Considere $\mathbb{X}$ um espaço de Banach com cada uma das normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Se para toda sequência (x_n) em $\mathbb{X}$ tal que $\|x_n\|_1 \to 0$ implica que $\|x_n\|_2 \to 0$, mostre que estas normas são equivalentes.

42. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados. Mostre que a projeção $P : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, $P(x, y) = x$ é uma aplicação aberta.

43. Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado e $f \in \mathbb{X}'$. Se $f \not\equiv 0$ mostre que f é uma aplicação aberta nos seguintes casos:

    (a) Quando $\mathbb{X}$ é um espaço de Banach, com o uso do teorema da aplicação aberta.

    (b) Quando $\mathbb{X}$ não é um espaço de Banach, usando a definição.

44. Consideremos o espaço vetorial $C^1[0,1]$ com a norma $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Mostre que o operador diferenciação $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ dada por $Tf = f'$ é uma aplicação aberta.

45. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Banach e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado e injetivo. Mostre que sua inversa: $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é um operador linear limitado, se e somente se, $\mathrm{Im}(T)$ é fechado.

46. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear fechado. Mostre que

    (a) Se $A \subseteq \mathbb{X}$ é compacto, então $T(A)$ é fechado.

    (b) Se $B \subseteq \mathbb{Y}$ é compacto, então $T^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{X} : Tx \in B\}$ é fechado.

47. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T \in B(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. Se (x_n) é uma sequência em $\mathbb{X}$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ e $Tx_n \to y$, mostre que $y = Tx$.

48. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear fechado. Mostre que

  (a) O núcleo, $N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$, é fechado.

  (b) Se $L \in B(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$, então $T + L : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to Y$ é fechado.

49. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é um operador linear fechado injetivo. Mostre que

  (a) T^{-1} é um operador fechado.

  (b) Se T^{-1} é limitado e $\mathbb{X}$ é completo, então $\mathrm{Im}(T)$ é fechado.

  (c) Se $\mathrm{Im}(T)$ é fechado e $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ são completos, então T^{-1} é limitado.

50. Considere o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \Big(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\Big)$$

Mostre que

  (a) T é limitado e calcule sua norma.

  (b) $\mathrm{Im}(T)$ não é fechado.

  (c) T é injetiva, porém $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \subseteq \ell^2 \to \ell^2$ não é limitado.

  (d) Se trocamos ℓ^2 por ℓ^p com $1 \leq p \leq \infty$ valem os resultados anteriores?

51. Considere o operador identidade $I : C[a.b] \subset L^1(a, b) \to C[a.b]$. Mostre que I é um operador fechado, porém não é limitado.

52. Use o Teorema do gráfico fechado para mostrar a segunda afirmação do Teorema 5.6.2.

53. Use a teoria de operadores fechados para mostrar o seguinte resultado: seja (x_n) uma sequência em $C^1[0, 1]$ tal que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge uniformemente para uma função x no intervalo $[0, 1]$. Se a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$, mostre que $x \in C^1[0, 1]$ e que

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$